République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques, de l'informatique et des sciences de la matière.
Département des mathématiques
Laboratoire de domiciliation: Mathématiques Appliquées et de Modélisation

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN 3ème CYCLE

Domaine : Mathématiques et Informatique. Filière : Mathématiques Appliquées.
Spécialité : Equations Différentielles et Applications.

Présentée par

BOUACIDA Ichrak

Intitulée

Systèmes de contrôle d'évolution d'ordres fractionnaires et leurs applications

Soutenue le : 12 / 06 / 2024 Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
Mr. CHAOUI Abderrezak	Prf	Univ. de Guelma	Président
Mr. KERBOUA Mourad	MCA	Univ. de Guelma	Encadreur
Mr. SEGNI Sami	MCB	Univ. de Guelma	Co-encadreur
Mr. ELLAGGOUNE Fateh	Prf	Univ. de Guelma	Examinateur
Mr. GUESMIA Amar	Prf	Univ. de Skikda	Examinateur

Année Universitaire : 2023/2024.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma précieuse famille,

à mes chers parents, que Dieu les préserve,

à mon mari, à mon frère Youcef

et à mes sœurs Aridj et Rawnak.

à tous ceux qui ont cru en mes capacités et m'ont encouragé.

Merci à vous. 

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

Avec une profonde gratitude, j'exprime ma sincère reconnaissance à mon superviseur, **Dr. M. KERBOUA**, pour ses conseils, son soutien et ses encouragements tout au long de ma période de doctorat. Son expérience, sa connaissance et sa patience sont inestimables pour moi. Je suis extrêmement reconnaissante pour les nombreuses heures qu'il a passées à examiner mon travail, discuter de mes idées et me fournir des commentaires, des remarques et des suggestions. Je le remercie également pour son humanité. Merci sincèrement pour votre respect et votre appréciation.

Je tiens également à remercier le co-superviseur, le **Dr. S. SEGNI**, pour tous ses mots d'encouragement, ses précieux conseils, sa gentillesse et sa générosité.

J'ai le plaisir d'exprimer mes sincères remerciements à mes professeurs membres du jury, le **Pr. CHAOUI Abderrezak** en tant que président et les professeurs **Pr. ELLAGGOUNE Fateh** et **Pr. GUESMIA Amar** en tant qu'examinateurs, pour leur gentillesse en acceptant de soutenir cette thèse.

Je présente mes sincères remerciements et respect à **Pr. M. Z. AISSAOUI** pour son soutien et ses précieux conseils, qui a été comme un père spirituel et académique pour moi.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers les membres du laboratoire de mathématiques appliquées et de modélisation **(LMAM)**, dirigé par le **Pr. H. GUEBBAI**, pour leur accueil et leur compréhension, ce qui m'a aidé dans mon parcours. Je vous adresse toute ma reconnaissance et mon respect.

Enfin, je tiens à remercier ma famille pour leur patience et leur soutien inconditionnel, ainsi que pour leur confiance constante en moi. Ils ont été une motivation constante pour mon succès. Un merci particulier à mon oncle Riad pour son soutien.



In this thesis, we obtain new results for different controllability methods for two novel classes of non-local Sobolev-type controllability systems in Hilbert spaces.

Firstly, we present appropriate conditions to study approximate controllability and exact null controllability for a new class of nonlinear differential equations of the υ-Hilfer type with non-local conditions.

Furthermore, we introduce a new function called "**k-Wright**" allowing us to investigate controllability for a broader class than initially considered. With this, we examine trajectory controllability for a nonlinear system of a new and more extensive type of fractional differential equations known as (k, υ)-Hilfer with non-local conditions.

These results were obtained using the theory of semi-groups, fixed-point theory, fractional calculus, and Gronwall inequalities.

Finally, we present examples illustrating the validity of these results.

Keywords: Approximate controllability, Null controllability, Trajectory controllability, Fractional Sobolev type integro-differential equations, υ-Hilfer fractional derivative, (k, υ)-Hilfer fractional derivative, Mild solution, Fixed point theorem, Nonlocal condition, Fractional power, Gronwall's inequality.

Mathematics Subject Classification: 93B05, 26A33, 46E39, 34K37, 34A12, 47H10.

Résumé

Dans cette thèse, nous obtenons de nouveaux résultats pour différentes méthodes de contrôlabilité pour deux nouvelles classes de systèmes de contrôle non locaux de type Sobolev dans des espaces de Hilbert.

Tout d'abord, nous présentons les conditions appropriées pour étudier la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité nulle exacte pour une nouvelle classe d'équations différentielles non linéaires de type υ-Hilfer avec des conditions non locales.

De plus, nous introduisons une nouvelle fonction appelée " k-**Wright**", qui nous permet d'étudier la contrôlabilité pour une classe plus large que celle étudiée initialement. Grâce à cela, nous examinons la contrôlabilité trajectoire pour un système non linéaire d'un type nouveau et plus étendu dans les équations différentielles fractionnaires connues sous le nom (k, υ)-Hilfer avec des conditions non locales.

Ces résultats ont été obtenus en utilisant la théorie des semi-groupes, la théorie du point fixe, ainsi que le calcul fractionnaire et les inégalités de Gronwall.

Enfin, nous présentons des exemples illustrant la validité de ces résultats.

Mots clé: Controllabilité approchée, Controllabilité nulle, Controllabilité trajectoire, Équations intégro-différentielles de type Sobolev fractionnaire, Dérivée fractionnaire de υ-Hilfer, Dérivée fractionnaire de (k, υ)-Hilfer, Solution Douce, Théorème du point fixe, Condition non locale, Puissance fractionnaire, Inégalité de Gronwall.

Mathematics Subject Classification: 93B05, 26A33, 46E39, 34K37, 34A12, 47H10.

الملخص

في هذه الأطروحة، تحصلنا على نتائج جديدة لطرق مختلفة من إمكانية التحكم لفئتين جديدتين من أنظمة التحكم الكسرية غير المحلية من نوع سوبوليف في فضاءات هيلبرت.

في البداية قدمنا، الشروط المناسبة لدراسة إمكانية التحكم التقريبي والتحكم الصفري الدقيق لفئة جديدة من المعادلات التفاضلية الكسرية الغير خطية من نوع
$\mathcal{V}$ -هليفر ذات الشروط غير المحلية.

علاوة على ذلك، قدمنا وظيفة جديدة (ك- رايت) ، والتي أهلتنا لدراسة إمكانية التحكم على فئة أوسع مما تم دراستها في البداية. حيث بفضلها، قمنا بدراسة إمكانية التحكم في المسار لنظام محايد غير خطي ولفئة جديدة وأكثر إتساعا في المعادلات التفاضلية الكسرية ذات الشروط غير المحلية (ك، $\mathcal{V}$)-هليفر.

تم الحصول على هذه النتائج باستخدام نظرية شبه المجموعات، نظرية النقطة الثابتة، كذلك الحساب الكسري ومتباينة جرونوال.

وأخيرا، نقدم أمثلة توضح صحة هذه النتائج.

الكلمات المفتاحية: التحكم التقريبي، التحكم الصفري، التحكم وفق المسار، المعادلات الكسرية التكاملية- التفاضلية من نوع سوبوليف، المشتقة الكسرية لـ $\mathcal{V}$ - هيلفر، المشتقة الكسرية لــ (ك ,$\mathcal{V}$)- هيلفر، شرط كسري غير محلي، نظرية النقطة الثابتة، متباينة جرونوال، حل معتدل، قوة كسرية.

التصنيف الرياضي: 93B05 ،26A33 ، 46E39، 34K37، 34A12،47H10.

Conférences Réalisées

1. I. Bouacida, M. Kerboua, S. Segni, Implicit fractional integro-differential equations involving ψ-Caputo fractional derivative, RDOPDE 22 Recent Developments in Ordinary and Partial Differential Equations Topic : Fractional Differential Equations.At : Béjaia, 22-26 mai 2022.

2. I. Bouacida, M. Kerboua, S. Segni, Existence And Uniquenes of Mild Solution For ψ-Hilfer Non Local Fractional Evolution Equation , Third National Mathematics Seminar 2022, May 26, 2022.At : Frères Mentouri University, Constantine 1, Algeria.

3. I. Bouacida, M. Kerboua, S..Segni, Existence and Approximate Controllability of Mild Solutions for ψ-Hilfer Fractional Integro-Differential Equations; 6th International Hybrid Conference On Mathematics "An Istanbul Meeting for World Mathematicians"At : 21-24 June 2022, Istanbul, Turkey.

4. I. Bouacida, M. Kerboua, S. Segni, Null Controllability of Nonlocal ψ-Hilfer fractional Differential Equation: The Second National Conference on Mathematics and its Applications (2nd SCNMA 2022) September 17-18, Bordj Bou Arréridj, Algeria.

5. I. Bouacida, M. Kerboua, S. Segni, Trajectory controllability of nonlocal nonlinear system involving ψ-Hilfer fractional derivative, Conference: The 6th International Workshop on Applied Mathematics and Modelling "WIMAM'2022". At: LMAM, University 8 may 1945 Guelma, Algeria.Affiliation: Université 8 mai 1945 - Guelma.

6. I. Bouacida, M. Kerboua, S. Segni, Existence results of Mild solution for Sobolev type ψ-Hilfer hybrid fractional differential evolution equations. May 2023 Conference: Second National Conference on Applied Mathematics and Didactics SNCAMD2023.At: Constantine-Algeria. May 13th, 2023.

7. I. Bouacida, M. Kerboua, Complete Controllability of Nonlinear $(k;\psi)$-Hilfer Fractional Differential Equations In Hilbert Space. July 2023 Conference: The Second Online National Conference on Pure and Applied Mathematics "CNMPA 2023"At: Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi-Tebessa, Algérie.

8. I. Bouacida, M. Kerboua, S. Segni, Approximate Controllability of Sobolev Type (k,ψ)-Hilfer Fractional Integro-Differential Equations In Hilbert Space. August 2023 Conference: The 23rd International Pure Mathematics Conference 2023 (23rd IPMC 2023) on Algebra, Analysis and Geometry, Islamabad , 26- 28 August 2023.At: Islamabad, Pakistan.

Contenus

Introduction

Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de mathématique, qui a pour but de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers ou complexes.

L'histoire des dérivées d'ordre non entier s'étend de la fin du **XVIIe** siècle à nos jours; les spécialistes s'accordent à faire remonter son début à la date du **30 septembre 1695**, où $\mathscr{L}$'$\mathscr{H}$ôpital posa une question à $\mathscr{L}$eibniz en s'interrogeant sur le sens de $\frac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. L'étude du calcul fractionnaire est née de cette question. $\mathscr{L}$eibniz a répondu à la question, "$d^{\frac{1}{2}}x$ sera égal à $x\sqrt{dx : x}$ ". C'est un paradoxe apparent dont on tirera un jour des conséquences utiles.

Pendant près de trois siècles, le calcul fractionnaire a été traité comme un concept mathématique intéressant, mais seulement un concept mathématique. On le considérait depuis longtemps comme la branche des mathématiques, étudiant les propriétés des dérivées et intégrales irrégulièrement ordonnées (appelées dérivées et intégrales fractionnaires). Sans aucune explication réelle ou pratique, il était perçu comme un résumé contenant seulement quelques manipulations mathématiques utiles.

Au fil des ans, de nombreux mathématiciens bien connus ont contribué au développement fondamental du calcul fractionnaire, tels que $\mathscr{L}$eibniz, $\mathscr{L}$'$\mathscr{H}$ôpital, $\mathscr{B}$ernoulli, $\mathscr{E}$uler et $\mathscr{L}$agrange. Quelques années plus tard, ils furent rejoints par $\mathscr{L}$aplace, $\mathscr{F}$ourier, $\mathscr{A}$bel, $\mathscr{L}$ouville, $\mathscr{R}$iemann, $\mathscr{G}$runewald, $\mathscr{L}$etnikoff, $\mathscr{H}$adamard, $\mathscr{R}$iess et plusieurs autres.

$\mathscr{R}$oss a organisé la première conférence sur le calcul fractionnaire à l'Université de New Haven en juin 1974 et a publié ses actes [56]. Par la suite, $\mathscr{S}$panier publié la première monographie consacrée au **calcul fractionnaire** en 1974 [52]. La recherche encyclopédique exceptionnellement détaillée de $\mathscr{S}$amko, $\mathscr{K}$ilbas et $\mathscr{M}$arichev, a été publiée en russe en 1987 et en anglais en 1993.

Le passage des formulations mathématiques pures aux applications a commencé à émerger depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique, etc. Pour plus de détails sur les travaux

fondamentaux concernant divers aspects du calcul fractionnaire et les considérations physiques fondamentaux en faveur de l'utilisation de modèles basés sur des dérivées d'ordre non entier, nous renvoyons à la monographie de $\mathscr{B}$agley [4], $\mathscr{E}$ngeita, $\mathscr{H}$ilfer [26], $\mathscr{K}$hare, $\mathscr{K}$ilbas [35], $\mathscr{M}$agin [42], $\mathscr{M}$ainardi, $\mathscr{M}$iller, $\mathscr{R}$oss [46], $\mathscr{N}$ishitomo [50], $\mathscr{O}$ldham [51], $\mathscr{O}$ldham et $\mathscr{S}$panier [52], $\mathscr{P}$etras, $\mathscr{P}$odlubny [54], $\mathscr{S}$abatier et al.[57], ainsi que les références qui s'y trouvent.

Récemment, les équations différentielles d'ordre fractionnaire se sont révélées être un outil efficace pour modéliser de multiples phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie, tels que l'électrochimie, l'électromagnétisme, la viscoélasticité, l'économie, etc. Les dérivés fractionnaires sont un excellent moyen de comprendre la mémoire et les propriétés génétiques de différents matériaux et processus. C'est le principal avantage des dérivées fractionnaires par rapport aux dérivées conventionnelles d'ordre entier.

Les travaux principalement consacrés aux équations aux dérivées fractionnaires sont ceux de $\mathscr{M}$iller et $\mathscr{R}$oss(1993) [46], de $\mathscr{P}$odlubny (1999) [54], de $\mathscr{K}$ilbas et al. (2006) [35], $\mathscr{D}$iethelm (2010) [21], $\mathscr{O}$rtigueira (2011), $\mathscr{A}$bbas et al. (2012) [2], et par $\mathscr{B}$aleanu et al (2012) [5].

Il existe plusieurs définitions concurrentes des dérivées fractionnaires et des intégrales. Certains d'entre eux comprennent, Riemann-Liouville, Caputo, Weyl, Hadamard, Met, Hilfer, υ-Hilfer, (k,υ)-Hilfer.

Point Fixe

Au cours des 80 dernières années environ, la théorie des points fixes s'est révélée être un outil très puissant et important dans l'étude des phénomènes non linéaires. La théorie du point fixe joue un rôle important dans l'analyse fonctionnelle, la théorie de l'approximation, les équations différentielles et les applications. Les fameux théorèmes du point fixe incluent le théorème de Banach.

La théorie elle-même est un beau mélange d'analyse, de topologie et de géométrie. La théorie du point fixe fournit les outils, permettant d'établir des théorèmes d'existence pour de nombreux problèmes non linéaires différents. Les théorèmes de point fixe reposent souvent sur certaines propriétés, telles que la continuité complète, la monotonie, la contraction, etc.

Le sujet de la théorie du point fixe est devenu un domaine important des mathématiques, en raison de son ample utilité dans d'autres domaines des mathématiques, notamment les équations différentielles ordinaires, les équations aux dérivées fractionnaires et les équations intégrales. Dans notre travail, nous utiliserons des théorèmes de points fixes pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions de

certains problèmes, que nous présenterons ultérieurement. Pour établir l'existence des solutions, nous utiliserons le théorème du point fixe de Schauder, ainsi que le principe de contraction de Banach pour garantir l'unicité.

Contrôlabilité

Si un système dynamique est contrôlé par des médias appropriés pour obtenir l'état souhaité, il est alors appelé un système de contrôle. Il existe plusieurs systèmes de contrôle artificiels simples et complexes dans notre vie quotidienne, tels que les climatiseurs automatiques, chauffe-eau automatique, machine à laver, missiles, etc.

La contrôlabilité est un problème mathématique qui analyse la possibilité de faire passer un système d'un état initial arbitraire à un état final arbitraire, à l'aide d'un ensemble de contrôles admissibles. La contrôlabilité est également un domaine d'étude important dans la théorie du contrôle.

Le concept de contrôlabilité est l'un des concepts fondamentaux de la théorie mathématique du contrôle, introduit par $\mathscr{K}$alman en 1960, qui a conduit à des conclusions très importantes concernant les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. De nombreux problèmes scientifiques et techniques sont de nature non linéaire et peuvent être décrits dans des espaces de dimension infinie. L'étude des résultats de contrôlabilité des systèmes de contrôle dans des espaces de dimension infinie est donc très importante.

La contrôlabilité des systèmes non linéaires dans un espace de dimension finie a été étudiée de manière approfondie par de nombreux auteurs, qui ont étendu le concept de contrôlabilité aux systèmes de dimension infinie et ont établi des conditions suffisantes, pour la contrôlabilité des systèmes non linéaires dans des espaces abstraits. Parmi les différentes approches de l'étude de la contrôlabilité des systèmes non linéaires, les techniques du point fixe ont été utilisées efficacement pour ces systèmes. Dans la méthode du point fixe, le problème de contrôlabilité est transformé en un problème de point fixe pour un opérateur non linéaire approprié dans un espace fonctionnel.

Il existe différents concepts de contrôlabilité, notamment la contrôlabilité approchée, la contrôlabilité exacte, la contrôlabilité nulle et enfin la contrôlabilité trajectoire.

Dans le chapitre 1, nous exposons les résultats préliminaires et les bases nécessaires pour la réalisation de cette thèse. Dans la première section, nous introduisons les définitions des espaces fonctionnels utilisées dans cette étude. La deuxième section présente les concepts fondamentaux de la théorie du

calcul fractionnaire, en exposant leurs propriétés nécessaires ainsi que les relations entre eux, qui ont grandement contribué à ce travail. Ensuite, dans la troisième section, nous abordons la définition des semi-groupes et certaines théories et propriétés qui leur sont associées. Enfin, nous présentons quelques théories, dont la théorie des points fixes qui est à la base de cette étude.

Dans le chapitre 2, nous avons étudié la contrôlabilité approchée d'une nouvelle classe d' équations intégro-différentielles υ-Hilfer fractionnaires rétrogrades perturbées, de type Sobolev avec des conditions non locales υ-fractionnaires. Nous avons établi un nouvel ensemble de conditions suffisantes, en utilisant la théorie des semi-groupes, le calcul υ-Hilfer fractionnaire et le théorème du point fixe de Schauder. Les résultats ont été obtenus en supposant que le système linéaire rétrograde υ-fractionnaire associé, est approximativement contrôlable. Enfin, un exemple est donné pour illustrer les résultats obtenus.

Dans le chapitre 3, nous abordons la contrôlabilité nulle exacte pour une autre classe d'équations intégro-différentielles fractionnaires implicites non local de type υ-Hilfer. Les résultats sont obtenus en utilisant la théorie des semi-groupes, le calcul υ-Hilfer fractionnaire et le théorème du point fixe de Banach. Enfin, nous fournissons un exemple pour illustrer l'applicabilité de nos résultats.

A la fin, nous étudions la contrôlabilité de trajectoire d'une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles fractionnaires neutres de type Sobolev non locales (k, υ)-Hilfer. Les résultats sont obtenus en utilisant des idées issues de la théorie des semi-groupes, du calcul (k, υ)-Hilfer fractionnaire, de la puissance fractionnaire des opérateurs et de l'inégalité de Gronwall. Enfin, nous avons donné un exemple pour valider l'application des résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

Contents

Dans ce chapitre, nous présentons des notations mathématiques nécessaires et des concepts, dont nous avons besoin dans les chapitres suivants. Nous examinons quelques propriétés essentielles des opérateurs différentiels fractionnaires. Nous passons également en revue certaines des propriétés de base des théorèmes de semi-groupe et de point fixe, qui sont cruciales dans nos résultats concernant les équations différentielles fractionnaires.

1.1 Espaces fonctionnels

Soit $\mathcal{J} = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, un intervalle fini ou infini, sur l'axe réel $\mathbb{R}$.

1.1.1 Espace Complet, Espace de Banach et Espace de Hilbert

Définition 1.1.1.

Soit $(\mathcal{X}; \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{X}$ est de Cauchy si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \geq 0, \quad \forall p, q \geq n_0, \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.2.

On dit que $\mathcal{X}$ est complet pour la norme $\|.\|$, si toute suite de Cauchy dans $\mathcal{X}$ est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Définition 1.1.3.

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace préhilbertien complet, c'est à-dire un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, qui est associée à un produit scalaire.

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Exemple 1.1.1.

- *L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.*
- *L'espace de suites l^2, constitué des suites $(\mathsf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que*

$$< \mathsf{z}_n, \mathsf{w}_n >= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{z}_n \overline{\mathsf{w}_n}.$$

- *L'espace $\mathbf{L}^2(\mathcal{J})$ des fonctions de $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable, avec la convention que deux fonctions égales presque partout sont égales, muni de*

$$< \mathfrak{f}, \mathfrak{h} >= \int_a^b \mathfrak{f}(x)\mathfrak{h}(x)dx.$$

1.1.2 Espaces des fonctions intégrables de Lebesgue $\mathbf{L}^p$

Notons $\mathbf{L}^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions $\mathfrak{h}$ Lebesgue intégrables muni de la norme

$$\|\mathfrak{h}\|_{\mathbf{L}^1} = \int_{\mathcal{J}} |\mathfrak{h}(t)|dt.$$

Définition 1.1.4.

Soit $1 < p < \infty$*, nous définissons*

$$\mathbf{L}^p(\mathcal{J}) = \Big\{ \quad \mathfrak{h} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}, \quad \mathfrak{h} \quad est \quad mesurable \quad et \quad |\mathfrak{h}|^p \in \mathbf{L}^1(\mathcal{J}) \Big\},$$

avec

$$\|\mathfrak{h}\|_p = \left(\int_{\mathcal{J}} |\mathfrak{h}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $\|.\|_p$ *est la norme associée à* $\mathbf{L}^p$*.*

Définition 1.1.5.

Nous fixons,

$$\mathbf{L}^\infty(\mathcal{J}) = \Big\{ \mathfrak{h} : \mathcal{J} \to \mathbb{R} | \mathfrak{h} \quad est \quad mesurable \quad et \quad il \quad existe \quad une \quad constante \quad \mu, \quad telleque \quad |\mathfrak{h}(x)| \leq \mu \quad p.p \; sur \quad \Omega \Big\},$$

avec

$$\|\mathfrak{h}\|_{\mathbf{L}^\infty} = \|\mathfrak{h}\|_\infty = inf \Big\{ \quad \mu \geq 0; \quad |\mathfrak{h}(t)| \leq \mu \quad p.p. \quad sur \quad \mathcal{J} \Big\}.$$

Théorème 1.1.1. ***(L'inégalité de Hölder)***

Supposons que $\mathfrak{f} \in \mathbf{L}^p(\mathcal{J})$*,* $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^q(\mathcal{J})$ *avec* $1 < p < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, alors,* $\mathfrak{f}\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{J})$ *et*

$$\int_{\mathcal{J}} |\mathfrak{f}(x)\mathfrak{h}(x)| \leq \left(\int_{\mathcal{J}} |\mathfrak{f}(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathcal{J}} |\mathfrak{h}(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.1.3 Espace de fonctions continues

Définition 1.1.6.

Soit $\mathcal{J}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, on définit respectivemment* $\mathsf{C}^0(\mathcal{J})$*,* $\mathsf{C}^n(\mathcal{J})$*,* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathsf{C}^\infty(\mathcal{J})$ *par*

$$\mathsf{C}^0(\mathcal{J}) = \{ \quad \mathfrak{h} : \mathcal{J} \to \mathbb{R} \quad continue\},$$

$$\mathsf{C}^n(\mathcal{J}) = \{ \quad \mathfrak{h} \in \mathsf{C}^{n-1}(\mathcal{J}) : \quad \mathfrak{h}^{(n)} \in \mathsf{C}(\mathcal{J})\},$$

$$\mathsf{C}^\infty(\mathcal{J}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathsf{C}^n(\mathcal{J}),$$

muni de la norme

$$\|\mathfrak{h}\|_{\mathsf{C}^n(\mathcal{J})} = \sum_{\iota=1}^{n} \|\mathfrak{h}^{(\iota)}\|_{\mathsf{C}(\mathcal{J})} = \sum_{\iota=1}^{n} \max_{t \in \mathcal{J}} |\mathfrak{h}^{(\iota)}(t)|.$$

1.1.4 Espace de fonctions absolument continues

Définition 1.1.7.

Soit $\mathcal{J}$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, on note par $\mathsf{AC}^1(\mathcal{J})$ l'espace des fonctions absolûment continues qui s'expriment sous la forme,

$$\mathfrak{h} \in \mathsf{AC}^1(\mathcal{J}) \Leftrightarrow \mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(a) + \int_a^t \mathfrak{h}'(s)ds, \quad t \in \mathcal{J}. \tag{1.1}$$

Pour $n \geq 2$, nous notons par $\mathsf{AC}^n(\mathcal{J})$ l'espace des fonctions $\mathfrak{h} : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$, telles que $\mathfrak{h}^{(\iota)} \in \mathsf{C}(\mathcal{J})$, $\iota = 1, ..., n-1$ et $\mathfrak{h}^{(n-1)} \in \mathsf{AC}^1(\mathcal{J})$.

Lemme 1.1.1.

Une fonction $\mathfrak{h} \in \mathsf{AC}^n(\mathcal{J})$, si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{h}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1}\mathfrak{h}^{(n)}(s)ds + \sum_{\iota=0}^{n-1} \frac{\mathfrak{h}^{(\iota)}(a)}{\iota!}(t-a)^{\iota}, \quad \forall t \in \mathcal{J} \tag{1.2}$$

- Si $n = 1$, on notera $\mathsf{AC}^1(\mathcal{J})$ par $\mathsf{AC}(\mathcal{J})$.

1.1.5 Espace de fonctions continues à poids

Définition 1.1.8. *[67]*

Soit $\mathcal{J}$ un intervalle fini et $\upsilon(t)$ est une fonction monotone croissante et positive sur $\mathcal{J}$, dans lequel $\upsilon(t) \neq 0$. L'espace de poids $\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ des fonctions continues $\mathfrak{h}$ est défini comme suit,

$$\mathsf{C}_{1-\lambda;\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X}) = \left\{ \quad \mathfrak{h}(t) : \mathcal{J} \to \mathcal{X}; \quad (\upsilon(t) - \upsilon(a))^{1-\lambda}\mathfrak{h}(t) \in \mathsf{C}(\mathcal{J}, \mathcal{X}), \quad 0 \leq 1-\lambda < 1 \right\},$$

l'espace $\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|\mathfrak{h}\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} = \underset{t\in\mathcal{J}}{max}|(\upsilon(t) - \upsilon(a))^{1-\lambda}\mathfrak{h}(t)|,$$

en particulier on a,

* $\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X}) = \mathsf{C}_{1-\lambda}(\mathcal{J}, \mathcal{X})$, si $\upsilon(t) = t$.

* $\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X}) = \mathsf{C}(\mathcal{J}, \mathcal{X})$, si $\upsilon(t) = t$ et $\lambda = 1$.

Définition 1.1.9. *[67]*

L'espace de poids $\mathsf{C}^n_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X})$ *de la fonction* $\mathfrak{h}$ *sur* $\mathcal{J}$*, est défini par*

$$\mathsf{C}^n_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X}) = \Big\{ \quad \mathfrak{h}:\mathcal{J}\to\mathcal{X}; \quad \mathfrak{h}(t)\in\mathsf{C}^{n-1}(\mathcal{J},\mathcal{X}); \quad \mathfrak{h}^{(n)}(t)\in\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X}),\ 0\leq 1-\lambda<1\Big\}$$

avec la norme,

$$\|\mathfrak{h}\|_{\mathsf{C}^n_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X})([a,b])} = \sum_{\iota=0}^{n}\|\mathfrak{h}^{(\iota)}\|_{\mathsf{C}(\mathcal{J},\mathcal{X})} + \|\mathfrak{h}^{(n)}\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X})}.$$

En particulier, si $n=0$*, on a* $\mathsf{C}^0_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X}) = \mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X})$.

1.2 Théorie des opérateurs

On note par $\|.\|_{\mathcal{X}}$ et $\|.\|_{\mathcal{Y}}$ les normes respectivement sur les espaces de Banach $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

1.2.1 Opérateurs linéaires et bornés

Un opérateur $\psi:\mathbb{D}(\psi)\subset\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ est dit linéaire, s'il vérifie la condition suivante [24] :

$$\psi(\alpha\varphi+\beta\vartheta) = \alpha\psi(\varphi)+\beta\psi(\vartheta), \quad \forall\varphi,\vartheta\in\mathcal{X} \quad et \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}(ou\ \ \mathbb{C}).$$

On dit que ψ est borné (ou continu) sur $\mathbb{D}(\psi)=\mathcal{X}$, s'il existe une constante positive ξ telle que,

$$\forall\vartheta\in\mathcal{X}, \quad \|\psi(\vartheta)\|_{\mathcal{Y}}\leq\xi\|\vartheta\|_{\mathcal{X}}.$$

La norme $\|.\|$ de l'opérateur ψ est définie par

$$\|\vartheta\| = \underset{\|x\|\neq 0}{sup}\frac{\|\psi(\vartheta)\|_{\mathcal{Y}}}{\|\vartheta\|_{\mathcal{X}}}.$$

On va établir quelques définitions importantes et notations supplémentaires, à savoir

- $\mathbb{D}(\psi)$ est dense si $\overline{\mathbb{D}(\psi)}=\mathcal{X}$.
- Noyau de $\psi\equiv N(\psi)=\Big\{\quad x\in\mathbb{D}(\psi), \quad \psi x=0\Big\}$.
- Graphique de $\psi\equiv G(\psi)=\Big\{\quad [\vartheta,\psi(\vartheta)], \quad \vartheta\in\mathbb{D}(\psi)\Big\}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.
- Image de $\psi\equiv Img(\psi)\equiv\Big\{\quad y\in\mathcal{Y} \quad \exists x\in\mathbb{D}(\psi); \quad y=\psi x\Big\}$.

Théorème 1.2.1.

Soit $\psi : (\mathcal{X}, \|.\|_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{Y}})$ *un opérateur linéaire, alors, les affirmations suivantes sont équivalentes,*

1. ψ *est continue sur tout* $\mathcal{X}$.
2. ψ *est continue en* 0.
3. ψ *est borné.*

Théorème 1.2.2.

L'espace linéaire $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *des opérateurs linéaires bornés de* $\mathcal{X}$ *dans* $\mathcal{Y}$ *est un espace de Banach.*

1.2.2 Opérateurs compacts

Définition 1.2.1.

Un opérateur borné $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *est dit compact, si* $\psi(\mathbb{B}_{\mathcal{X}})$ *a une fermeture compacte dans* $\mathcal{Y}$ *(pour la topologie forte).*

L'ensemble de tous les opérateurs compacts de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ est noté $\mathsf{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, pour simplifier, on écrit $\mathsf{K}(\mathcal{X}) = \mathsf{K}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

Théorème 1.2.3.

L'ensemble $\mathsf{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *(pour la topologie associée à la norme* $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*).*

Proposition 1.2.1.

Si ψ *ou* ϕ *est compact, alors la composée* $\psi\phi$ *est compacte.*

Théorème 1.2.4.

Soit ψ *un opérateur compact sur* $\mathcal{H}$*, alors* $\mathbb{I} - \psi$ *est inversible si et seulement si* $\mathbb{I} - \psi$ *est injective.*

1.2.3 Opérateur contractant

Soient $(\mathcal{X}; \|.\|)$, un espace vectoriel normé et ψ un opérateur borné, l'opérateur ψ est dit opérateur contractant, s'il existe une constante positive $\zeta \in]0, 1[$ telle que

$$\forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathcal{X}; \quad \|\psi(\vartheta_1) - \psi(\vartheta_2)\| \leq \zeta \|\vartheta_1 - \vartheta_2\|.$$

1.2.4 Opérateur fermé

Définition 1.2.2.

Un opérateur $\psi : \mathbb{D}(\psi) \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *est dit fermé si son graphe*

$$G(\psi) = \{(x, \psi x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid x \in \mathbb{D}(\psi)\},$$

est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Autrement dit, ψ *est fermé si, pour toute suite* x_n *de* $D(\psi)$ *telle que* $x_n \to x$ *dans* $\mathcal{X}$ *et* $\psi x_n \to y$ *dans* $\mathcal{Y}$*, on a* $x \in D(\psi)$ *et* $\psi x = y$.

1.2.5 Opérateur m-dissipatif

Définition 1.2.3.

Un opérateur $(\psi, \mathbb{D}(\psi))$*, linéaire non borné dans* $\mathcal{X}$*, est dissipatif si*

$$\forall x \in \mathbb{D}(\psi),\ \forall \lambda > 0,\ \|\lambda x - \psi x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition 1.2.4.

Un opérateur $(\psi, \mathbb{D}(\psi))$*, linéaire non borné dans* $\mathcal{X}$*, est m-dissipatif si*

1. ψ *est dissipatif,*
2. $\forall f \in \mathcal{X},\ \forall \lambda > 0,\ \exists x \in \mathbb{D}(\psi)$ *telque* $\lambda x - \psi x = f$.

1.3 Fonctions spéciales

1.3.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler notée $\Gamma(\rho)$ représente une des fonctions de base du calcul fractionnaire, elle généralise la factorielle $n!$ et permet à n de prendre également des valeurs non entières et même complexes.

Définition 1.3.1. *[54]*

La fonction Gamma est une fonction strictement décroissante pour $0 < \rho \leq 1$*, elle est définie par l'intégrale,*

$$\Gamma(\rho) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\rho-1} dt, \quad Re(\rho) > 0, \quad \rho \in \mathbb{C},$$

où parfois

$$\Gamma(\rho) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2\rho-1} dt, \quad Re(\rho) > 0,$$

en particulier on a,

* $\Gamma(1) = 1,$
* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$
* $\Gamma(0_+) = +\infty,$
* $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ *(La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle)*

Théorème 1.3.1.

Si $\rho > 0$, *alors* $\Gamma(\rho+1) = \rho\Gamma(\rho)$.

Théorème 1.3.2.

Soit $0 < \rho < 1$. *Alors,*

$$\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho) = \frac{\pi}{sin\pi\rho}.$$

Remarque 1.3.1.

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(\rho) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{\rho}}{\rho(\rho+1)...(\rho+n)},$$

où nous supposons que $Re(\rho) > 0$.

1.3.2 La fonction k-Gamma

En 2007, Diaz et Pariguan [18] définissent la fonction k-Gamma de la manière suivante:

Définition 1.3.2. *[18]*

Pour $\rho \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(\rho) > 0$ *et* $\mathsf{k} > 0$, *la fonction* k*-Gamma (notée* $\Gamma_{\mathsf{k}}(.)$ *), est défini par*

$$\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho) = \int_0^{\infty} t^{\rho-1} e^{-\frac{t^{\mathsf{k}}}{\mathsf{k}}} dt.$$

- **Propriétés de la fonction k-Gamma** [18]

* $\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho) = \mathsf{k}^{\frac{\rho}{\mathsf{k}}-1}\Gamma(\frac{\rho}{\mathsf{k}}),$
* $\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho+\mathsf{k}) = \rho\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho),$
* $\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}) = 1,$ avec $\mathsf{k} > 0.$

Remarque 1.3.2.

Lorsque $\mathsf{k} \to 1$, *alors* $\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho) \to \Gamma(\rho)$.

1.3.3 La fonction Bêta

Une autre fonction spéciale étroitement liée à la fonction Gamma, est la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important, notamment en combinaison avec la fonction Gamma. Elle possède une représentation intégrale simple et utile.

Définition 1.3.3.

La fonction Bêta est donnée par,

$$\mathscr{B}(\rho,\varrho) = \int_0^1 t^{\rho-1}(1-t)^{\varrho-1}dt, \quad Re(\rho)>0, Re(\varrho)>0$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^{2\rho-1}cos(t)^{2\varrho-1}dt.$$

Remarque 1.3.3.

La relation entre les fonction spéciales Γ *et* $\mathscr{B}$ *est donnée par,*

$$\mathscr{B}(\rho,\varrho) = \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\rho+\varrho)} = \mathscr{B}(\varrho,\rho), \quad \forall \rho,\varrho \in \mathbb{C}: \quad Re(\rho)>0, \quad Re(\varrho)>0.$$

1.3.4 La fonction k-Bêta

Définition 1.3.4. *[18]*

Soient $\rho,\varrho \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(\rho)>0$ *et* $Re(\varrho)>0$, *alors, la fonction* k-*Bêta* $\left(\mathscr{B}_{\mathsf{k}}(\rho,\varrho)\right)$ *est définie par,*

$$\mathscr{B}_{\mathsf{k}}(\rho,\varrho) = \frac{1}{\mathsf{k}}\int_0^1 t^{\frac{\rho}{\mathsf{k}}-1}(1-t)^{\frac{\varrho}{\mathsf{k}}-1}dt.$$

Remarque 1.3.4.

Notons que la fonction Bêta et la fonction k-*Bêta ont la relation suivante:*

$$\mathscr{B}_{\mathsf{k}}(\rho,\varrho) = \frac{1}{\mathsf{k}}\mathscr{B}(\frac{\rho}{\mathsf{k}},\frac{\varrho}{\mathsf{k}}).$$

De plus, la fonction k-*Bêta et la fonction* k-*Gamma ont la relation suivante:*

$$\mathscr{B}_{\mathsf{k}}(\rho,\varrho) = \frac{\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho)\Gamma_{\mathsf{k}}(\varrho)}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho+\varrho)}.$$

1.4 Éléments de la théorie du calcul fractionnaire

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions, lemmes et théorèmes liés aux opérateurs intégraux fractionnaires et différentiels fractionnaires, qui seront utilisés tout au long de cette thèse.

Depuis le début du calcul fractionnaire en [40] 1695, il existe de nombreuses définitions des intégrales et des dérivées fractionnaires. Nous mentionnons quelques unes, notamment

1.4.1 Quelques Intégrales fractionnaires

Définition 1.4.1.

L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\rho > 0$ d'une fonction $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$, est formellement définie par,

$$\mathfrak{I}^{\rho}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_a^t (t-s)^{\rho-1}\mathfrak{h}(s)ds. \tag{1.3}$$

Définition 1.4.2. *[48]*

Soit $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ et $\mathsf{k}; \rho \in \mathbb{R}_+$, alors, l'intégrale fractionnaire k-Riemann-Liouville d'ordre ρ de la fonction $\mathfrak{h}$, est donnée par

$$_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\rho}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \frac{1}{\mathsf{k}\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho)} \int_a^t (t-s)^{\frac{\rho}{\mathsf{k}}-1}\mathfrak{h}(s)ds, \tag{1.4}$$

où $\Gamma_{\mathsf{k}}(.)$ est la fonction k-Gamma.

Soit $\mathcal{J} = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$ avec $(0 < a < b < \infty)$ un intervalle fini et $\upsilon \in \mathsf{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ une fonction croissante avec $\upsilon(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathcal{J}$.

Définition 1.4.3. *[35]*

Soit $\mathfrak{h}$ une fonction intégrable définie sur $\mathcal{J}$, alors, l'intégrale fractionnaire au sens de υ-Riemann-Liouville d'ordre $\rho > 0$ $(\rho \in \mathbb{R})$ de la fonction $\mathfrak{h}$ est donnée par,

$$\mathfrak{I}^{\rho;\upsilon}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_a^t \upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{\rho-1}\mathfrak{h}(s)ds, \tag{1.5}$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma d'Euler.

Lemme 1.4.1. *[67]*

Soient $\gamma, \rho > 0$, alors pour toute $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\mathfrak{I}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\mathfrak{I}_{a+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}_{a^+}^{\gamma+\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t); \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

De plus on a,

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}_{a^+}^{\rho-1,\upsilon}\mathfrak{h}(t).$$

Lemme 1.4.2.

Soit $n-1 \leq \lambda < n$ et $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}_\lambda(\mathcal{J})$, alors

$$\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}\mathfrak{h}(a) = \lim_{t\to a^+}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}\mathfrak{h}(t) = 0, \quad n-1 \leq \lambda < \rho.$$

Lemme 1.4.3. *[66]*

Soit $\rho > 0$, $0 \leq \lambda < 1$, alors, $\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}$ est borné de $\mathsf{C}_{\lambda;\upsilon}(\mathcal{J})$ dans $\mathsf{C}_{\lambda;\upsilon}(\mathcal{J})$. De plus, si $\lambda \leq \rho$, alors $\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}$ est borné de $\mathsf{C}_{\lambda;\upsilon}(\mathcal{J})$ dans $\mathsf{C}(\overline{\mathcal{J}}, \mathbb{R})$.

Définition 1.4.4.

Soit $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{J})$ et $\mathsf{k} \in \mathbb{R}_+$, alors, l'intégrale (k, υ)-Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $\rho > 0$ $(\rho \in \mathbb{R})$ de la fonction $\mathfrak{h}$, est donné par

$$_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \frac{1}{\mathsf{k}\Gamma_{\mathsf{k}}(\rho)}\int_a^t \upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{\frac{\rho}{\mathsf{k}}-1}\mathfrak{h}(s)ds, \tag{1.6}$$

où $\Gamma_{\mathsf{k}}(.)$ est la fonction k-Gamma.

Théorème 1.4.1. *[36]*

Soient $\rho, \mathsf{k} \in \mathbb{R}_+$, alors,

$$_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathsf{k}^{\frac{-\rho}{\mathsf{k}}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\frac{\rho}{\mathsf{k}};\upsilon}\mathfrak{h}(t), \quad \mathfrak{h} \in \mathsf{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}),$$

où $\mathfrak{I}_{a^+}^{\frac{\rho}{\mathsf{k}};\upsilon}$ est l'intégrale fractionnaire υ-Hilfer.

Lemme 1.4.4.

Les propriétés suivantes de l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction υ sont valables, à savoir

1. *L'opérateur intégral $_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho;\upsilon}$ est linéaire.*

2. *La propriété de semi-groupe de l'opérateur d'intégration fractionnaire* ${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}$ *est donné par le résultat suivant :*

$${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}\,{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho+\gamma;\upsilon}\mathfrak{h}(t), \quad \rho,\gamma > 0,$$

elle est valable en tout point si $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}_{\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathbb{R})$, *en plus elle est valable presque partout si* $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{J},\mathbb{R})$.

3. *La commutativité est vérifiée, en effet*

$${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}\left({}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\right)\mathfrak{h}(t) = {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\gamma,\upsilon}\left({}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho;\upsilon}\right)\mathfrak{h}(t), \quad \rho,\gamma > 0.$$

4. *L'opérateur d'intégration fractionnaire* ${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}$ *est borné de* $\mathsf{C}_{\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathbb{R})$ *à* $\mathsf{C}_{\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathbb{R})$.

Lemme 1.4.5. *[61]*

Soit $0 < a < b < \infty$, $\rho > 0$, $0 \le \lambda < 1$, $\mathsf{k} > 0$, *et* $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}_{\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathbb{R})$. *Si* $\frac{\rho}{\mathsf{k}} > 1-\lambda$, *alors*

$${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(a) = \lim_{t\to a^+} {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}\mathfrak{h}(t) = 0.$$

Lemme 1.4.6. *([36], [60], [67])*

Soient $\rho, \mathsf{k} \in \mathbb{R}_+$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{\lambda}{\mathsf{k}} > -1$, *alors,*

$${}_{k}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho;\upsilon}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\frac{\lambda}{\mathsf{k}}-1}(t) = \frac{\Gamma_{\mathsf{k}}(\lambda+\mathsf{k})}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\lambda+\mathsf{k}+\rho)}(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\frac{\lambda+\rho}{\mathsf{k}}-1}.$$

Si $\lambda > 0$ *et* $\mathsf{k} = 1$, *on obtient*

$$\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho;\upsilon}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\lambda-1}(t) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\rho)}(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda+\rho-1}.$$

1.4.2 Quelques notions de dérivées fractionnaires

Définition 1.4.5. *[7]*

Pour $\rho \ge 0$ *et* $n-1 \le \rho < n$, *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* ρ *d'une fonction* $\mathfrak{h}$ *intégrable sur* $[a,t]$, *est formellement définie par*

$${}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho}\mathfrak{h}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathfrak{I}_{a+}^{(n-\rho)}\mathfrak{h}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\rho-1}\mathfrak{h}(s)ds. \qquad (1.7)$$

Remarque 1.4.1.

Notons que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée ordinaire lorsque ρ est un nombre naturel non nul.

Définition 1.4.6.

Soit $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ et $\mathsf{k}, \rho \in \mathbb{R}_+$, alors, la dérivée fractionnaire au sens k-Riemann-Liouville d'ordre ρ de la fonction $\mathfrak{h}$, est donnée par

$$^{RL}{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \left(\mathsf{k}\frac{d}{dt}\right)^n {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{n\mathsf{k}-\rho}_{a+}\mathfrak{h}(t), \quad n = [\frac{\rho}{\mathsf{k}}], \tag{1.8}$$

où $[\frac{\rho}{\mathsf{k}}]$ désigne la partie entière de $\frac{\rho}{\mathsf{k}}$.

Définition 1.4.7. *[7]*

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\rho \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction $\mathfrak{h}$, est donnée par

$$^{C}\mathfrak{D}^{\rho}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}^{n-\rho}_{a+}(\mathfrak{D}^n\mathfrak{h}(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)}\int_0^t (t-s)^{n-\rho-1}\mathfrak{h}^{(n)}(s)ds, \tag{1.9}$$

avec $\quad n-1 \leq \rho \leq n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Définition 1.4.8. *[43]*

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer d'ordre $0 < \rho < 1$ et $0 \leq \varrho \leq 1$ de la fonction $\mathfrak{h} : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$,est définie par

$$\mathfrak{D}^{\rho,\varrho}_{a+}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}^{\varrho(1-\rho)}_{a^+}\frac{d}{dt}\mathfrak{I}^{(1-\varrho)(1-\rho)}_{a+}\mathfrak{h}(t). \tag{1.10}$$

Remarque 1.4.2.

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer peut être vue comme une interpolation entre les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo.

1. *Pour $\varrho = 0, \ \ 0 < \rho < 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer coincide avec la dérivée fractionnaire classique au sens de Riemann-Liouville*

$$\mathfrak{D}^{\rho,0}_{a^+}\mathfrak{h}(t) = \frac{d}{dt}\mathfrak{I}^{(1-\rho)}_{a^+}\mathfrak{h}(t) = {}^{L}\mathfrak{D}^{\rho}_{a+}\mathfrak{h}(t).$$

2. Pour $\varrho = 1$, $0 < \rho < 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer coincide avec la dérivée fractionnaire classique au sens de Caputo.

$$\mathfrak{D}_{a^+}^{\rho,1}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}_{a^+}^{(1-\rho)}\frac{d}{dt}\mathfrak{h}(t) = {}^{C}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho}\mathfrak{h}(t).$$

Avec la large expansion des définitions des intégrales fractionnaires et des dérivées, il était nécessaire d'introduire le concept d'une dérivée fractionnaire d'une fonction $\mathfrak{h}$ par rapport à une autre fonction. Nous présentons la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, telle que définie dans [35].

Définition 1.4.9. *[35]*

Soit $\upsilon(t) \neq 0$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $\rho > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Les dérivées de Riemann-Liouville d'ordre ρ d'une fonction $\mathfrak{h}$ par rapport à υ, sont définies comme suit,

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) &= \left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathfrak{I}_{a+}^{n-\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\rho)}\left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^t \upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{n-\rho-1}\mathfrak{h}(s)ds, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où $n = [\rho] + 1$.

Récemment, Almeida [3] a proposé une nouvelle dérivée fractionnaire appelée dérivée υ-Caputo, basée sur la dérivée de Caputo, définie de la manière suivante:

Définition 1.4.10. *[3]*

Soit $\rho > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J} = [a, b]$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $\mathfrak{h}, \upsilon \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ deux fonctions telles que υ est croissante et $\upsilon(t) \neq 0$, pour tout $t \in \mathcal{J}$.
La dérivée fractionnaire υ-Caputo de $\mathfrak{h}$ d'ordre ρ est donnée par,

$${}^{C}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}_{a+}^{n-\rho;\upsilon}\left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathfrak{h}(t), \tag{1.12}$$

où $n = [\rho] + 1$.

- La relation entre la dérivée fractionnaire de υ-Caputo et de υ-Riemann-Liouville sur L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. *Si $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ et $\rho > 0$, alors,*

$$^{C}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = ^{RL}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t)\left[\mathfrak{h}(t) - \sum_{\varsigma=0}^{n-1}\frac{1}{\varsigma!}(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\varsigma}\mathfrak{h}_{\upsilon}^{[\varsigma]}(a)\right]. \tag{1.13}$$

Bien que ces définitions soient très générales, il existe un autre facteur qui unifie les éléments ci-dessus et peut combiner de nombreuses définitions. Ce facteur est la différentielle fractionnaire d'une fonction par rapport à une autre fonction υ, appelée dérivée de υ-Hilfer.

Définition 1.4.11. *[67]*

Soit $n-1 < \rho < n$, $(n = [\rho]+1)$, et $\mathfrak{h}, \upsilon \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ deux fonctions telles que υ est croissante et $\upsilon(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathcal{J}$.

Alors, la dérivée fractionnaire υ-Hilfer de fonction $\mathfrak{h}$ d'ordre ρ et de type $0 \leq \varrho \leq 1$, est définie par

$$^{H}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho,\varrho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}_{a+}^{\varrho(n-\rho);\upsilon}\left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathfrak{I}_{a+}^{(1-\varrho)(n-\rho);\upsilon}\mathfrak{h}(t). \tag{1.14}$$

La dérivée fractionnaire υ-Hilfer, telle que définie ci-dessus, peut s'écrire sous la forme suivante:

$$^{H}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho,\varrho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}_{a+}^{\lambda-\rho;\upsilon}\mathfrak{D}_{a+}^{\lambda;\upsilon}\mathfrak{h}(t),$$

avec, $\lambda = \rho + \varrho(n-\rho)$.

Théorème 1.4.3. *[67]*

Les dérivées fractionnaires υ-Hilfer, sont des opérateurs bornés pour tout $n-1 < \rho < n$ et $0 \leq \varrho \leq 1$, donnés par

$$\|^{H}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho,\varrho;\upsilon}\mathfrak{h}\|_{\mathsf{C}_{\lambda,\upsilon}} \leq K\|\mathfrak{h}\|_{\mathsf{C}_{\lambda,\upsilon}^{n}},$$

avec, $K = \dfrac{(\upsilon(b)-\upsilon(a))^{n-\rho}}{(n-\lambda)(\lambda-\rho)\Gamma(n-\lambda)\Gamma(\lambda-\rho)}$.

Corollaire 1.4.1. *[67]*

Soit $\varrho > \rho$ et $n-1 < \rho < n$ (où n est un nombre entier), supposons que $\upsilon'(t) > 0$, alors,

$$^{H}\mathfrak{D}_{a^{+}}^{\rho,\varrho,\upsilon}\mathfrak{I}_{a^{+}}^{\varrho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{I}_{a^{+}}^{\varrho-\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t).$$

Théorème 1.4.4. *[67]*

Soit $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$, $\rho > 0$, *et* $0 \leq \varrho \leq 1$, *nous avons*

$$^{H}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho,\varrho;\upsilon}\mathfrak{I}_{a+}^{\rho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t).$$

Théorème 1.4.5. *[67]*

Si $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J}, \mathbb{R})$; $n-1 < \rho < n$, $0 \leq \varrho \leq 1$ *et* $\lambda = \rho + \varrho(n-\rho)$, *alors*

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\rho;\upsilon}\,{}^{H}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho,\varrho;\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(x) - \sum_{\varsigma=1}^{n} \frac{(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda-\varsigma}}{\Gamma(\lambda-\varsigma+1)}\mathfrak{h}_{\upsilon}^{[n-\varsigma]}\mathfrak{I}_{a+}^{(1-\varrho)(n-\rho),\upsilon}\mathfrak{h}(a), \tag{1.15}$$

pour tout $t \in \mathcal{J}$, *où* $\mathfrak{h}_{\upsilon}^{[n]}(t) := \left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n}\mathfrak{h}(t)$.

En plus, pour $0 < \rho < 1$, *on a la relation suivante:*

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\rho,\upsilon}\,{}^{H}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho,\varrho,\upsilon}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t) - \frac{(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\mathfrak{I}_{a+}^{(1-\varrho)(1-\rho)}\mathfrak{h}(a),$$

avec $0 < \lambda < 1$ *et* $t \in \mathcal{J}$.

Remarque 1.4.3. *L'opérateur* ${}^{H}\mathfrak{D}_{a+}^{\rho,\varrho;\upsilon}$ *est réduit à :*

* *La dérivée fractionnaire de Hilfer lorsque* $\upsilon(t) \to t$ *[26].*
* *La dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard lorsque* $\upsilon(t) \to logt$ *[29].*
* *La dérivée fractionnaire de Hilfer-Katugampola lorsque* $\upsilon(t) \to t^{\alpha}$, $\alpha > 0$ *[26].*
* *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville quand* $\upsilon(t) \to t$, $\varrho \to 0$ *[35].*
* *La dérivée fractionnaire de Caputo lorsque* $\upsilon(t) \to t$, $\varrho \to 1$ *[35].*
* *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville généralisé lorsque* $\varrho \to 0$ *[35].*
* *La dérivée fractionnaire Caputo généralisé lorsque* $\varrho \to 1$ *[3].*

Enfin, une large classe de coefficients fractionnaires, est couverte par la dérivée fractionnaire (k, υ)-Hilfer dont la définition est donnée par

Définition 1.4.12. *[36]*

Soit $\rho, \mathsf{k} \in \mathbb{R}_{+} = (0, \infty)$, $\varrho \in (0,1)$, $\upsilon \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$, $\upsilon(t) \neq 0$, $t \in \mathcal{J}$ *et* $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J}, \mathbb{R})$, *alors, la dérivée fractionnaire* (k, υ)*-Hilfer d'une fonction* $\mathfrak{h}$ *d'ordre* ρ *et de type* ϱ, *est définie par*

$$
\begin{aligned}
{}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(t) &= {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\varrho(\mathsf{k}n-\rho);\psi}_{a^+}\left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n\left(\mathsf{k}^n{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{(1-\varrho)(\mathsf{k}n-\rho);\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}\right)(t)\\
&= {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\varrho(\mathsf{k}n-\rho);\upsilon}_{a^+}\delta^n_\upsilon\left(\mathsf{k}^n{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{(1-\varrho)(\mathsf{k}n-\rho);\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}\right)(t),
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

où $\delta^n_\upsilon = \left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n$ *et* $n = \left[\frac{\rho}{\mathsf{k}}\right]$.

Théorème 1.4.6. *[36]*

Soient $\rho, \mathsf{k} \in \mathbb{R}_+$ *et* $\varrho \in (0,1)$, *alors,*

$$
{}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(t) = \mathsf{k}^{\frac{\rho}{\mathsf{k}}}\,{}^{H}\mathfrak{D}^{\frac{\rho}{\mathsf{k}},\varrho,\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(t), \quad \mathfrak{h} \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J},\mathbb{R}),
$$

où ${}^{H}\mathfrak{D}^{\frac{\rho}{\mathsf{k}},\varrho,\upsilon}_{a^+}$ *est la dérivée fractionnaire* υ*-Hilfer.*

Remarque 1.4.4. *([36], [11], [54])*

La dérivée fractionnaire (k,υ)*-Hilfer se réduit à* (k,υ)*-Riemman-Liouville lorsque* $\varrho = 0$, *de* (k,υ)*-Caputo quand* $\varrho = 1$, *de* υ*-Hilfer quand* $\mathsf{k} = 1$, *de* k*-Hilfer quand* $\upsilon(t) = t$, *de* k*-Hilfer–Katugampola quand* $\upsilon(t) = t^\rho$, *de* k*-Hilfer–Hadamard quand* $\upsilon(t) = logt$ *et de Hilfer lorsque* $\upsilon(t) = t$ *et* $\mathsf{k} = 1$.

Théorème 1.4.7. *[60]*

Supposons que $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J},\mathbb{R})$, $n-1 < \frac{\rho}{\mathsf{k}} \leq n$, $0 \leq \varrho \leq 1$ *et* $\mathsf{k} > 0$, *alors*

$$
{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\rho,\upsilon}_{a^+}\,{}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda-i}}{\mathsf{k}^{i-n}\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(\lambda-i+1))}\delta^{[n-i]}_\upsilon\,{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\mathsf{k}(n-\lambda);\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(a), \; t \in \mathcal{J} \tag{1.17}
$$

où $\lambda = \frac{1}{\mathsf{k}}\left(\varrho(n\mathsf{k}-\rho)+\rho\right)$, $\delta^{[n]}_\upsilon = \left(\frac{1}{\upsilon'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n$.

De plus, si $n = 1$, *nous avons*

$$
{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\rho,\upsilon}_{a^+}\,{}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t) - \frac{(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda-1}}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\lambda)}\,{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{(1-\varrho)(\mathsf{k}-\rho);\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(a).
$$

Corollaire 1.4.2.

Soit $\varrho > \rho$, $n-1 < \rho < n(n \in \mathbb{N})$ *et* $\mathsf{k} \in \mathbb{R}_+$.

Supposons que $\upsilon'(t) > 0$, *alors*

$$
{}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}\,{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\varrho;\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(t) = {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\varrho-\rho;\upsilon}_{a^+}\mathfrak{h}(t).
$$

Théorème 1.4.8. *[61]*

Soient $\rho, \mathsf{k} \in \mathbb{R}_+$, $n = \left[\frac{\rho}{\mathsf{k}}\right]$, *alors, pour* $\mathfrak{h} \in \mathsf{C}^n(\mathcal{J},\mathbb{R})$, *nous avons*

$$
\left({}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}\,{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\rho;\upsilon}_{a^+}\right)\mathfrak{h}(t) = \mathfrak{h}(t).
$$

Lemme 1.4.7. *([36], [60])*

Soient $\rho, \varrho, \mathsf{k} \in \mathbb{R}_+$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{\lambda}{\mathsf{k}} > -1$, *alors,*

$$ {}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\frac{\lambda}{\mathsf{k}}-1}(t) = \frac{\Gamma_{\mathsf{k}}(\lambda+\mathsf{k})}{\Gamma_k(\lambda+\mathsf{k}-\rho)}(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\frac{\lambda-\rho}{\mathsf{k}}-1}. $$

Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *et* $\mathsf{k} = 1$, *on trouve*

$$ \mathfrak{D}^{\rho;\upsilon}_{a^+}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\lambda-1}(t) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\rho)}(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda+\rho-1}, $$

$$ {}^{H}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\lambda-1}(t) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\rho)}(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda-\rho-1}. $$

Lemme 1.4.8. *([61], [65])*

Soit $t > 0,\ \rho > 0,\ 0 \leq \varrho \leq 1$ *et* $\mathsf{k} > 0$, *alors pour* $0 < \lambda < 1;\ \lambda = \frac{1}{\mathsf{k}}(\varrho(\mathsf{k}-\rho)+\rho)$, *on a*

$$ {}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\lambda-1}(t) = 0. $$

Si $\mathsf{k} = 1$, *on trouve*

$$ {}^{H}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}_{a^+}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\lambda-1}(t) = 0. $$

$$ \mathfrak{D}^{\lambda;\upsilon}_{a^+}(\upsilon(x)-\upsilon(a))^{\lambda-1}(t) = 0. $$

1.5 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace classique, notée $\mathfrak{L}$, joue un rôle important dans la résolution des équations différentielles ordinaires et fractionnaires.

Définition 1.5.1.

Soit $\mathfrak{h} \in \mathbf{L}^1(0,\infty)$, *la transformée de Laplace de la fonction* $\mathfrak{h}(t)$ *s'exprime comme suit*

$$ \mathfrak{L}\{\mathfrak{h}(t)\}(s) = \widehat{\mathfrak{h}}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\mathfrak{h}(t)dt, \quad \textit{pour tout} \quad s. $$

Définition 1.5.2. *[28]*

Soient $\mathfrak{h}, \upsilon : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *des fonctions à valeurs réelles, telles que* $\upsilon(t)$ *est continue et* $\upsilon'(t) > 0$ *sur* $\mathcal{J}$.

La transformée de Laplace généralisée de $\mathfrak{h}$ *est notée*

$$ \mathfrak{L}_\upsilon\{\mathfrak{h}(t)\}(s) = \widehat{\mathfrak{h}}(s) = \int_a^{+\infty} e^{-s(\upsilon(t)-\upsilon(a))}\mathfrak{h}(t)\upsilon'(t)dt, \quad \textit{pour tout} \quad s. $$

Lemme 1.5.1. *[28]*

Supposons que $0 < \rho < 1$ *et* $0 \leq \varrho \leq 1$, $\mathfrak{h}$ *est continue sur chaque intervalle* $[0;t]$ *et* $\upsilon(t)$*-d'ordre exponentiel, alors*

$$(i) \quad \mathfrak{L}_{\upsilon}\left\{\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\mathfrak{h}(t)\right\}(s) = \frac{\widehat{\mathfrak{h}}(s)}{s^{\rho}}.$$

$$(ii) \quad \mathfrak{L}_{\upsilon}\left\{{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\rho,\varrho,\upsilon}\mathfrak{h}(t)\right\}(s) = s^{\rho}\mathfrak{L}_{\upsilon}\{\mathfrak{h}(t)\} - s^{\rho-1}\mathfrak{h}(0).$$

Définition 1.5.3. *[6]*

Soient $\mathfrak{h}, \upsilon : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, *des fonctions à valeurs réelles, telles que* $\upsilon(t)$ *est continue et* $\upsilon'(t) > 0$ *sur* $\mathcal{J}$. *Soit également* $\gamma, \mathsf{k} > 0$, *la* (k,υ)*-transformée de Laplace généralisée de* $\mathfrak{h}$, *est définie comme suit*

$$ {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{L}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\{\mathfrak{h}(t)\}(s) := \widehat{\mathfrak{h}}(s) = \int_a^{+\infty} e^{-s\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}(\upsilon(t)-\upsilon(a))}\mathfrak{h}(t)\upsilon'(t)dt$$

$$= \frac{1}{\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}}\mathcal{L}\left\{\mathfrak{h}\left(\upsilon^{-1}\left(\frac{t}{\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}} + \upsilon(a)\right)\right)\right\}(s),$$

pour tout s, $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ *est la transformée de Laplace classique de* $\mathfrak{h}$.

Lemme 1.5.2. *[6]*

Soient $\gamma, \mathsf{k} > 0$ *et* $\mathfrak{h}$ *une fonction continue par morceaux sur chaque intervalle* $[a,t]$ *et* $\upsilon(t)$*-d'ordre exponentiel, nous avons*

$$1. \quad {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{L}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\{{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\rho,\upsilon}\mathfrak{h}(t)\}(s) = \frac{\widehat{\mathfrak{h}}(s)}{\left(s\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}\right)^{\frac{\rho}{\mathsf{k}}}\mathsf{k}^{\frac{\rho}{\mathsf{k}}}}.$$

$$2. \quad {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{L}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\left\{{}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}_{a^+}^{\rho,\varrho,\upsilon}\mathfrak{h}(t)\right\}(s) = \mathsf{k}^{n}\left[\left(s\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}\right)^{n}\frac{{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{L}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\{\mathfrak{h}(t)\}(s)}{\left(s\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}\right)^{\frac{\mathsf{k}n-\rho}{\mathsf{k}}}\mathsf{k}^{\frac{\mathsf{k}n-\rho}{\mathsf{k}}}} - \sum_{\iota=0}^{n-1}\left(s\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}\right)^{n-\iota-1}\left({}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{a^+}^{\mathsf{k}n-\rho,\upsilon}\mathfrak{h}\right)^{[\iota]}(a)\right].$$

Lemme 1.5.3. *[6]*

Nous avons, les relations suivantes:

1. ${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{L}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\{1\}(s) = \frac{1}{s\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}}}, \quad s > 0.$

2. ${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{L}_{a^+}^{\gamma;\upsilon}\{(\upsilon(t)-\upsilon(a))^{\lambda}\}(s) = \dfrac{\Gamma_{\mathsf{k}}((1+\lambda)\mathsf{k})}{(s\mathsf{k}^{1-\frac{\gamma}{\mathsf{k}}})^{1+\lambda}\mathsf{k}^{\lambda}}, \quad s > 0, Re(\lambda) > 0.$

1.6 Rappel sur la théorie du semi-groupe

Dans cette section, nous présentons les principes fondamentaux de la théorie des semi-groupes, concepts qui seront utilisés tout au long de cette thèse.

Considérons $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ l'espace des applications linéaires continues de l'espace de Banach $\mathcal{X}$ dans lui-même.

Définition 1.6.1.

Une famille à un paramètre $\mathbb{V}(t)$, $0 \leq t < \infty$, *d'opérateurs dans* $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ *est dite semi-groupe si*

$(*)$ $\quad \mathbb{V}(0) = \mathbb{I}$. *(* $\mathbb{I}$ *est l'opérateur d'identité dans* $\mathcal{L}(\mathcal{X})$*)*

$(**)$ $\quad \mathbb{V}(\rho + \varrho) = \mathbb{V}(\rho)\mathbb{V}(\varrho)$, *pour tout* $\rho, \varrho \geq 0$. *(propriété algébrique)*

Exemple 1.6.1.

Soit $\mathcal{X}$ *un espace de Banach,* $\mathbb{V} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, *et* $x_0 \in \mathcal{X}$. *On considère un système différentiel défini comme*

$$x'(t) + Vx(t) = 0,$$

$$x(0) = x_0,$$

la solution est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{-tV}.$$

Donc, le semi- group $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *est bien défini est donnée par* $\{\mathbb{V}(t) = e^{-tV}\}_{t\geq 0}$.

Définition 1.6.2.

Soit $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe dans l'espace de Banach* $\mathcal{X}$.

- *Si* $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *satisfait*

$$\underset{t\to 0}{lim} \|\mathbb{V}(t) - \mathbb{I}\| = 0; \quad t \geq 0,$$

on dit que $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu.*

- *Si* $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *vérifié (propriété topologique)*

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \underset{t\to 0}{lim} \|\mathbb{V}x - x\| = 0,$$

on dit que $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu (ou de classe* C_0*), ou simplement* C_0*-semi-groupe.*

- *Si* $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *satisfait*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall x' \in \mathcal{X}', \quad \lim_{t\to 0^+} | < \mathbb{V}x - x, x' > | = 0,$$

on dit que $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe faiblement continu.*

Définition 1.6.3.

Soit $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe sur* $\mathcal{X}$.

On pose $\quad \mathbb{D}(V) = \left\{ x \in \mathcal{X} \quad telque \quad \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{V}(t)-\mathbb{I}}{t} x \quad existe \right\},$

où l'opérateur $V : \mathbb{D}(V) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$*, donné par*

$$Vx = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{V}(t)x - x}{t}, \quad pour \quad x \in \mathbb{D}(V).$$

Cet opérateur est appelé générateur infinitésimal de $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$.

Proposition 1.6.1.

Soit V *le générateur infinitisimal d'un* C_0*-semi-groupe, alors,* $\mathbb{D}(V)$ *est un sous espace vectoriel dense dans* $\mathcal{X}$*,* $(\overline{\mathbb{D}(V)} = \mathcal{X})$.

Théorème 1.6.1.

Un opérateur V *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\mathbb{V}(t)$ *uniformement continu, si et seulement si* $V \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ *et* $\mathbb{V}(t) = e^{tV(t)}$.

Théorème 1.6.2.

Si $\mathbb{V}(t)$ *est un* C_0*-semi-groupe compact pour* $t > t_0$*, alors* $\mathbb{V}(t)$ *est continu par rapport à la topologie uniforme des opérateurs pour* $t > t_0$.

Proposition 1.6.2.

Soit V *un générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$.

Si $x \in \mathbb{D}(V)$*, alors* $\quad \mathbb{V}(t)x \in \mathbb{D}(V)$.

De plus

$$\mathbb{V}(t)Vx = V\mathbb{V}(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.6.1.

- *On voit que,* $\mathbb{V}(t)\mathbb{D}(V) \subseteq \mathbb{D}(V); \quad \forall t \geq 0.$
- *Le générateur infinitisimal* V *est un opérateur fermé.*

Théorème 1.6.3.

Soit $\mathbb{V}(t)$ *un* C_0*-semi-groupe. Il existe deux constantes* $\lambda_1 \geq 0$ *et* $\lambda_2 \geq 1$ *telles que,*

$$\|\mathbb{V}(t)\| \leq \lambda_2 e^{\lambda_1 t}, \quad pour \quad 0 \leq t < \infty.$$

Définition 1.6.4.

Soit $\mathbb{V}(t)$ *un* C_0*-semi-groupe.*

Si, $\quad \|\mathbb{V}(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0 \quad (\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 0),$

alors, $\mathbb{V}(t)$ *est un* C_0*-semi-groupe de contraction.*

Théorème 1.6.4.

Soit $\mathbb{V}(t)$ *et* $\mathbb{S}(t)$ *deux* C_0*-semi-groupes, ayant le même générateur infinitésimal* V*,*

alors, on a

$$\mathbb{V}(t) = \mathbb{G}(t); \quad pour\ tout \quad t \geq 0.$$

Théorème 1.6.5.

Soit $\mathbb{V}(t)$ *un* C_0*-semi-groupe et soit* V *son générateur infinitésimal, alors,*
a) Pour $\varphi \in \mathcal{X}$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \int_t^{t+s} \mathbb{V}(\iota)\varphi d\iota = \mathbb{V}(t)\varphi.$$

b) Pour $\varphi \in \mathcal{X}$, $\int_0^t \mathbb{V}(\iota)\varphi d\iota \in \mathbb{D}(V)$

$$V\left(\int_0^t \mathbb{V}(\iota)\varphi d\iota\right) = \mathbb{V}(t)\varphi - \varphi.$$

c) Pour $\varphi \in \mathbb{D}(V)$, $\mathbb{V}(t)\varphi \in \mathbb{D}(V)$ *et,*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{V}(t)\varphi = V\mathbb{V}(t)\varphi = \mathbb{V}(t)V\varphi.$$

d)Pour $\varphi \in \mathcal{X}$,

$$\mathbb{V}(t)\varphi - \mathbb{V}(\iota)\varphi = \int_\iota^t \mathbb{V}(\tau)V\varphi d\tau = \int_\iota^t V\mathbb{V}(\tau)\varphi d\tau.$$

Définition 1.6.5.

Soit A un opérateur linéaire fermé donné sur un espace de Banach $\mathcal{X}$, l'ensemble des résolvantes est défini comme suit, $\rho(V) = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} / \quad (\alpha \mathbb{I} - V)^{-1} \textit{existe} \quad \textit{et} \quad \textit{borne} \quad \textit{dans} \quad \mathcal{H} \right\}$.
Pour $\alpha \in \rho(V)$, la famille des opérateurs linéaires bornés $\mathfrak{R}(\alpha, V) = (\alpha \mathbb{I} - V)^{-1}$ est appelée la résolvante de V.

Proposition 1.6.3.

Soit $\mathbb{V}(.)$ un C_0-semi-groupe engendré par V.

Si pour certains $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad \mathfrak{R}(\alpha)x = \int_0^\infty e^{-\alpha\iota}\mathbb{V}(\iota)xd\iota$, existe pour chaque $x \in \mathcal{X}$,

alors $\alpha \in \rho(V)$ et $\mathfrak{R}(\alpha) = \mathfrak{R}(\alpha, V)$.

1.7 Quelques théorèmes

Théorème 1.7.1. *(Hille-Yosida 1)*

Un opérateur linéaire non borné $(V, \mathbb{D}(V))$ dans $\mathcal{X}$ est considéré comme le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur $\mathcal{X}$, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifées,

1. *V est fermé.*
2. *$\mathbb{D}(V)$ est dense dans $\mathcal{X}$.*
3. *Pour chaque $\alpha > 0$, l'opérateur $(\alpha \mathbb{I} - V)$ établit une bijection de $\mathbb{D}(V)$ dans $\mathcal{X}$, et son inverse $(\alpha \mathbb{I} - V)^{-1}$ est un opérateur borné sur $\mathcal{X}$, qui satisfait*

$$\left\| (\alpha \mathbb{I} - V)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Théorème 1.7.2. *(Hille-Yosida 2)*

Un opérateur linéaire non borné $(V, \mathbb{D}(V))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur $\mathcal{X}$, si et seulement si V est m-dissipatif et possède un domaine dense dans $\mathcal{X}$.

Proposition 1.7.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, si $\lambda_1 < Re(\alpha)$, alors*

$$\mathfrak{R}(\alpha, V)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\alpha t} t^{n-1} \mathbb{V}(t) dt, \ \alpha \in \rho(V).$$

De plus,

$$\left\| \mathfrak{R}(\alpha, V)^n \right\| \leq \frac{\lambda_2}{(Re(\alpha) - \lambda_1)^n}.$$

1.7.1 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes du point fixe, consistent à reformuler le problème initial sous la forme d'une équation $x = \varphi(x)$, offrant ainsi des conditions générales, applicables pour la validité de cette équation.

Définition 1.7.1.

Considérons $\mathcal{X}$, un espace vectoriel normé avec une norme $\|.\|$ et φ une application de $\mathcal{X}$ dans lui-même. Un point $x \in \mathcal{X}$ est défini comme un point fixe de φ s'il satisfait la condition suivante

$$\varphi x = x.$$

Théorème 1.7.3. *(Point fixe de Banach)*

Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach $\mathcal{X}$. Alors, toute contraction ψ qui envoie $\mathcal{O}$ sur lui-même, possède un point fixe unique.

Théorème 1.7.4. *(Point fixe de Schauder (1930))*

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach, $\mathcal{O}$ un sous-ensemble convexe fermé borné de $\mathcal{X}$, et $\psi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ une application continue et compacte. Alors, ψ possède au moins un point fixe dans $\mathcal{O}$.

Théorème 1.7.5. *(Point fixe de Schaefer)*

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach et $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\mathcal{O} = \left\{ \quad x \in \mathcal{X} : x = \alpha\psi x, \quad pour \quad certains \quad \alpha \in (0,1)\right\},$$

est borné, alors ψ possède un point fixe.

Théorème 1.7.6. *(Point fixe de Krasnoselskii)*

Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble fermé, convexe et non vide d'un espace de Banach $\mathcal{X}$, ψ et φ les opérateurs tels que

1. *$\psi x + \varphi y \in \mathcal{O}$ pour tout $x, y \in \mathcal{O}$.*
2. *ψ est continu et compact.*
3. *φ est une application de contraction.*

Alors, il existe $\mathbf{N} \in \mathcal{O}$ tel que $\mathbf{N} = \psi\mathbf{N} + \varphi\mathbf{N}$.

1.7.2 Présentation de la solution Douce (Solution Mild)

Cette section rappelle la résolution de l'équation différentielle linéaire fractionnaire.

Le concept de solution douce peut être introduit pour analyser le problème à valeur initiale non homogène

suivant:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Vx(t) + \Phi(t), \quad 0 < t < \mathbf{T}, \\ x(0) &= x_0, \quad x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $\Phi : [0, \mathbf{T}] \to \mathcal{X}$.

Ci-dessous, nous introduisons la notion d'une solution douce.

Définition 1.7.2.

Soit V un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe, noté $\{\mathbb{V}(t)\}_{t\geq 0}$, agissant sur l'espace $\mathcal{X}$. Supposons $x_0 \in \mathcal{X}$ et $\Phi \in \mathbf{L}^1([0, \mathbf{T}], \mathcal{X})$, où $\mathbf{L}^1([0, \mathbf{T}], \mathcal{X})$ est l'espace des fonctions Bochner-intégrables sur l'intervalle $[0, \mathbf{T}]$ à valeurs dans $\mathcal{X}$. La fonction $x \in \mathsf{C}([0, \mathbf{T}], \mathcal{X})$ est alors définie comme suit,

$$x(t) = \mathbb{V}(t)x_0 + \int_0^t \mathbb{V}(t-s)\Phi(s)ds, \quad 0 < t < \mathbf{T}$$

est la solution douce du problème (1.18) avec une condition initiale sur l'intervalle $[0, \mathbf{T}]$.

1.8 Contrôlabilité en dimension infini

La contrôlabilité est l'un des aspects qualitatifs les plus importants d'un système dynamique. Le problème de la contrôlabilité pour prouver l'existence d'une fonction de contrôle, capable de conduire la solution du système de son état initial à un état final, où les états initiaux et finaux peuvent varier dans tout l'espace.

Définition 1.8.1.

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$, deux espace de Hilbert. Considérons le système dynamique suivant:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Vx(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t \in [0, \mathbf{T}] \\ x(0) &= x_0, \quad x_0 \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

pour une valeur $\mathbf{T} > 0$ fixée, $u \in \mathbf{L}^2([0, \mathbf{T}], \mathcal{U})$, l'opérateur V est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{V}(.)$ dans $\mathcal{X}$, et $\mathcal{B}$ représente un opérateur borné de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}$, ($\mathcal{X}$ est l'espace des états, et $\mathcal{U}$ l'espace des contrôles du système).

Nous savons que le problème (1.19) a une unique solution douce $x = x(t; x_0; u) \in \mathsf{C}([0, \mathbf{T}], \mathcal{X})$, donné par

$$x(t; x_0; u) = \mathbb{V}(t)x_0 + \int_0^t \mathbb{V}(t-s)\mathcal{B}u(s)ds, \quad t \in [0, \mathbf{T}].$$

Définition 1.8.2.

On dit que le contrôle u conduit l'état a à l'état b au temps $\mathbf{T} > 0$, si

$$x(\mathbf{T}; a, u) = b.$$

On peut également affirmer que l'état b est atteignable à partir de a au temps $\mathbf{T}$.

Définition 1.8.3.

On dit que le système (1.19) est contrôlable au temps $\mathbf{T} > 0$ si, pour tout $a \in \mathcal{X}$ et tout $b \in \mathcal{X}$, il existe une fonction de contrôle $u \in \mathbf{L}^2(0, \mathbf{T}; \mathcal{U})$ telle que,

$$x(\mathbf{T}; a, u) = b.$$

On peut également affirmer que la paire $(V, \mathcal{B})$ est contrôlable au temps $\mathbf{T} > 0$.

Chapitre 2

Résultats de contrôlabilité pour des équations intégro-différentielles υ-Hilfer fractionnaires rétrogrades perturbées de type Sobolev dans l'espace de Hilbert

Contents

2.1 Introduction

La contrôlabilité approchée des systèmes de contrôle est plus adaptée à l'étude, car ses conditions sont généralement trés fortes dans des espaces de dimension infinie. Plusieurs auteurs ont étudié les problèmes de contrôlabilité dans différents types de systèmes non linéaires, voir ([45], [59], [75]) et leurs références.

En 2014, Mophou [47] a étudié la contrôlabilité approchée de l'équation différentielle semi-linéaire fractionnaire rétrograde, au moyen d'une régularisation de type Tikhonov.

En particulier, la contrôlabilité approchée des EDF de Hilfer dans différentes conditions, a été largement discutée. Mahmudov et al. [44], ont examiné la contrôlabilité exacte des EDF de Hilfer dans un espace de Hilbert, en supposant qu'un système linéaire associé à l'équation donnée est approximativement contrôlable.

En 2017, Debbouche et Al. [17] et Du et al. [23], ont étudié la contrôlabilité approchée des EDF de Hilfer, ainsi que des EDF de Hilfer semi-linéaires, avec des inclusions de contrôle impulsif dans les espaces de Banach, respectivement.

En 2018, Lv et Yang [41], ont étudié la contrôlabilité approchée des EDF de Hilfer neutres, en appliquant les techniques de la théorie de l'analyse stochastique et de la théorie des opérateurs de semi-groupe dans un espace de Hilbert.

Dans des travaux récents, Bedi et al. [8], à l'aide du théorème du point fixe de Schauder et de la théorie des opérateurs presque sectoriels dans l'espace de Banach, ont discuté l'existence de solutions douces et de la contrôlabilité approchée des équations d'évolution fractionnaire de Hilfer, avec des opérateurs presque sectoriels et des conditions non locales.

En 2021, Bora et Roy [10], ont discuté la contrôlabilité approchée pour une classe de système de contrôle fractionnaire avec semi-groupe analytique, régi par des équations différentielles comprenant des dérivées fractionnaires de Hilfer d'ordre $\delta \in (0, 1)$ et de type $\xi \in [0, 1]$, dans un espace de Banach.

En 2021, Vijayakumar et al. [75], ont étudié les résultats de contrôlabilité approchée, pour les inclusions intégro-différentielles de type Sobolev avec un retard infini, en utilisant le théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin pour les applications multivaluées.

En 2021, Dineshkumar et al. [22], ont examiné la contrôlabilité approchée des inclusions différentielles stochastiques fractionnaires neutres de Hilfer de type Sobolev, dans les espaces de Hilbert.

Dans ce chapitre, nous étudions la contrôlabilité approchée d'équations intégro-différentielles rétrogrades perturbées de type Sobolev, avec condition non locale υ-fractionnaire dans un espace de Hilbert. Un nouvel ensemble de conditions suffisantes est établi en utilisant la théorie de semi-groupe, le calcul υ-Hilfer fractionnaire et le théorème du point fixe de Schauder. Les résultats sont obtenus sous l'hypothèse que le système linéaire rétrograde υ-fractionnaire associé, est approximativement

contrôlable. Enfin, un exemple est donné pour illustrer les résultats obtenus.

2.2 Position de problème

On considère une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles υ-Hilfer fractionnaires rétrogrades perturbées de type sobolev, avec condition non local υ-fractionnaire, sous la forme

$$\begin{cases} {}^H\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}[\mathcal{E}x(t)] = (\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})x(t) + \mathcal{B}u(t) + \mathfrak{f}\left(t, x(t), \mathfrak{I}^{\delta,\upsilon}x(t)\right), \quad t \in \mathcal{J} = (0,\mathcal{T}], \\ \mathfrak{I}^{(1-\rho)(1-\varrho),\upsilon}\left[\mathcal{M}x(t)\right]_{t=\mathcal{T}} - \mathbf{g}(x) = x_{\mathcal{T}}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où ${}^H\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}$ est la dérivée fractionnaire au sens de υ-Hilfer d'order $\frac{1}{2} < \rho < 1$, de type $0 < \varrho < 1$ et $0 < \delta < 1$. L'état $x(.)$ prend ses valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{X}$. La fonction de controle $u(t)$ est donnée dans $\mathcal{U}$ (espace de contrôle), $u \in \mathbf{L}^2(\mathcal{J},\mathcal{U})$, et $\mathcal{B} : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ est un opérateur linéaire borné. Les fonctions $\mathfrak{f} : \mathcal{J} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathbf{g} : \mathsf{C}(\mathcal{J},\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ sont appropriées. On considère les opérateurs $(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{E} : \mathbb{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, et $\mathcal{M} : \mathbb{D}(X) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, qui vérifient les conditions suivantes :

($\mathcal{A}$1) $\Delta\mathcal{V}$ est un opérateur linéaire borné dans $\mathcal{X}$.

($\mathcal{A}$2) $\mathcal{E}, (\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})$ et $\mathcal{M}$ sont des opérateurs linéaires fermés.

($\mathcal{A}$3) $\mathbb{D}(\mathcal{M}) \subset \mathbb{D}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{D}(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ sont bijectifs.

($\mathcal{A}$4) $\mathcal{E}^{-1} : \mathcal{X} \to \mathbb{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{M}^{-1} : \mathcal{X} \to \mathbb{D}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{X}$ sont des opérateurs linéaires, bornés et compacts.

Lemme 2.2.1. *([53])*

Soit $\mathcal{V}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{\mathbb{S}(t), t \geq 0\}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{X}$. Si $\Delta\mathcal{V}$ est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{X}$, alors $(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{\widetilde{\mathbb{S}}(t), t \geq 0\}$.

Remarque 2.2.1.

De ($\mathcal{A}$4), nous déduisons que $\mathcal{E}^{-1}$ est un opérateur borné. Notons que ($\mathcal{A}$4) implique aussi que $\mathcal{E}$ est fermé, car $\mathcal{E}^{-1}$ est fermé et injectif, alors son inverse est également fermé. Il ressort de ($\mathcal{A}$2) − ($\mathcal{A}$4) et du théorème du graphe fermé que nous obtenons la caractère borné de l'opérateur linéaire $(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})\mathcal{E}^{-1}$ $: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, par conséquent, $-(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})\mathcal{E}^{-1}$ engendre un semi-groupe $\left\{\widetilde{\mathbb{S}}(t) = e^{-(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})\mathcal{E}^{-1}t}, t \geq 0\right\}$.

Nous considérons l'espace de poids $\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X})$ [67], l'espace de toutes fonctions continues définies par

$$\mathsf{C}_{1-\lambda;\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X}) = \Big\{\mathfrak{f} \in (0,\mathcal{T}] \to \mathcal{X};\ (\upsilon(t)-\upsilon(0))^{1-\lambda}\mathfrak{f}(t) \in \mathsf{C}(\mathcal{J},\mathcal{X})\Big\}, \quad 0 \leq \lambda = \rho + \varrho(1-\rho) < 1.$$

Il est clair que $\mathsf{C}_{1-\lambda;\upsilon}$ est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|f\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} = \max_{t\in\mathcal{J}} |(\upsilon(t)-\upsilon(0))^{1-\lambda}\mathfrak{f}(t)|.$$

Avant de commencer notre étude, nous avons rappelons quelques notations nécessaires, telles que

$$N_0 = \|\mathcal{E}^{-1}\|, \quad L_0 = \sup_{t\geq 0}\|\widetilde{\mathbb{S}}(t)\| < \infty, \quad C_0 = \|\mathcal{M}^{-1}\|.$$

Et

$$\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(t)) = \mathfrak{f}(t, x(t), \mathfrak{I}^{\delta,\upsilon}x(t)), \quad \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda} = (\upsilon(t)-\upsilon(0))^{1-\lambda}.$$

D'aprés les **Définition 1.4.3**, **Définition 1.4.11** et **Théorème 1.4.5**, il est possible de reformuler le problème (2.1). Anssi nous obtenons après reformulation l'équation

$$\mathcal{E}x(t) = \mathcal{E}x(\mathcal{T}) - \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1} \times \Big[(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})x(s) + \mathcal{B}x(s) + \mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))\Big]ds. \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.2.

Si,

$$x(t) = \frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{(1-\rho)(\varrho-1)}(\mathcal{T},t)}{\Gamma(\varrho(1-\rho)+\rho)}\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)]$$
$$- \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_t^{\mathcal{T}} \mathcal{E}^{-1}\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1} \times \Big[(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})x(s) + \mathcal{B}x(s) + \mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))\Big]ds.$$

Alors, on obtient,

$$\begin{aligned} x(t) &= \overset{\frown}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] + \textstyle\int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))ds \\ &+ \textstyle\int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\mathcal{B}u(s)ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Démostration 2.2.1.

*La preuve est similaire à la preuve du **Lemme 3** dans ([25]), on peut obtenir la résultat en effectuant les ajustements nécessaires (transformation de laplace généralisée **Définition 1.5.2**).*

Maintenant, nous allons présenter la définition de la solution douce (**Solution Mild**)

Définition 2.2.1.

Une solution $x(.) = x(u)(.) \in \mathsf{C}_{1-\gamma,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ *est dite solution douce de* (2.1) *si, pour chaque fonction de contrôle* $u \in \mathbf{L}^2(\mathcal{J},\mathcal{U})$*, elle satisfait*

(i) $\mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\rho)(1-\varrho),\upsilon}[\mathcal{M}x(t)]_{t=\mathcal{T}} - \mathbf{g}(x) = x_{\mathcal{T}}$.

(ii) Pour chaque $0 \le t \le \mathcal{T}$*, elle vérifie l'équation intégrale suivante:*

$$\begin{aligned} x(t) &= \overset{\smile}{\mathbb{S}}{}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t)\,\mathcal{M}^{-1}\,[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] + \int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\,\overset{\smile}{\mathbb{T}}{}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))ds \\ &+ \int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\smile}{\mathbb{T}}{}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,\mathcal{B}u(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Telle que,

$$\overset{\smile}{\mathbb{S}}{}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)\,x = \mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\rho)(\varrho-1),\upsilon}\overset{\smile}{\mathbb{P}}{}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x, \tag{2.5}$$

$$\overset{\smile}{\mathbb{P}}{}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x = \int_0^{+\infty} \mathcal{E}^{-1}h_{\rho}(\Theta)\,\overset{\smile}{\mathbb{S}}\,[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,\Theta]\,xd\Theta, \tag{2.6}$$

$$\overset{\smile}{\mathbb{T}}{}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x = \rho\int_0^{+\infty} \mathcal{E}^{-1}\Theta h_{\rho}(\Theta)\,\overset{\smile}{\mathbb{S}}\,[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,\Theta]\,xd\Theta, \quad 0 \le s < t \le \mathcal{T}, \tag{2.7}$$

où

$$h_{\rho}(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(1-n\rho)}, \quad \frac{1}{2} < \rho < 1, \Theta \in (0,\infty)$$

est une fonction de densité de probabilité avec $h_{\rho}(\Theta) \ge 0, \quad \Theta \in (0,\infty)$,

$$\int_0^{\infty} h_{\rho}(\Theta)\,d\Theta = 1 \tag{2.8}$$

et

$$\int_0^{\infty} \Theta^{\zeta}h_{\rho}(\Theta)\,d\Theta = \frac{\Gamma(1+\zeta)}{\Gamma(1+\rho\zeta)}. \tag{2.9}$$

Lemme 2.2.3. *([3], [53], [80])*

(1) Pour tout $t > 0$ *fixé,* $\overset{\smile}{\mathbb{S}}{}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)$ *et* $\overset{\smile}{\mathbb{T}}{}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)$ *sont des opérateurs linéaires bornées, et pour tout* $x \in \mathcal{X}$*,*

$$\left\| \overset{\smile}{\mathbb{S}}{}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)\,x \right\| \le \frac{N_0L_0\mathcal{Q}_{\upsilon}^{(1-\rho)(\varrho-1)}(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\rho+\varrho(1-\rho))}\|x\| = C_1\|x\|,$$

$$\left\| \overset{\smile}{\mathbb{T}}{}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x \right\| \le \frac{N_0L_0}{\Gamma(\rho)}\|x\| = C_2\|x\|.$$

(2) Les opérateurs $\overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)$ *et* $\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)$ *sont fortement continus pour tout* $t \geq s \geq 0$ *c'est-à-dire, pour chaque* $x \in \mathcal{X}$ *et* $0 \leq s \leq t_1 < t_2 \leq \mathcal{T}$*, alors,*

$$\|\overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t_2,s)\,x - \overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t_1,s)\,x\| \to 0$$

et

$$\|\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t_2,s)\,x - \overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t_1,s)\,x\| \to 0,$$

où, $t_1 - t_2 \to 0$.

Démostration 2.2.2.

(1) Pour $t \geq 0$*, comme* $\overset{\smile}{\mathbb{S}}(t)$ *est un opérateur linéaire, il est facile de voir que* $\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)$ *et* $\overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)$ *sont également des opérateur linéaires.*

Pour tout $x \in \mathcal{X}$*,* $t > 0$*, et grâce à l'égalité suivante*

$$\int_0^{\infty} \Theta^{\zeta} h_{\rho}(\Theta)\,d\Theta = \frac{\Gamma(1+\zeta)}{\Gamma(1+\rho\zeta)}, \quad \frac{1}{2} < \rho < 1, \Theta \in (0,\infty),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\left\|\overset{\smile}{\mathbb{P}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x\right\| &= \left\|\int_0^{+\infty} \mathcal{E}^{-1} h_{\rho}(\Theta)\,\overset{\smile}{\mathbb{S}}\left[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,\Theta\right] x d\Theta\right\| \\
&\leq N_0 L_0 \left\|\int_0^{+\infty} h_{\rho}(\Theta)\,x d\Theta\right\| \\
&\leq N_0 L_0.
\end{aligned}$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x\right\| &= \left\|\rho\int_0^{+\infty} \mathcal{E}^{-1}\Theta h_{\rho}(\Theta)\,\overset{\smile}{\mathbb{S}}\left[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,\Theta\right] x d\Theta\right\| \\
&\leq \rho N_0 L_0 \left\|\int_0^{+\infty} \Theta h_{\rho}(\Theta)\,x d\Theta\right\| \\
&\leq \frac{N_0 L_0}{\Gamma(\rho)}\,\|x\| \\
&\leq C_2\,\|x\|\,.
\end{aligned}$$

Pour $t \in \mathcal{J}$ *et* $x \in \mathcal{X}$*,*

$$\begin{aligned}
\left\|\overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)\,x\right\| &= \left\|\mathcal{I}_{0^+}^{(1-\rho)(\varrho-1),\upsilon}\overset{\smile}{\mathbb{P}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x\right\| \\
&\leq \left\|\overset{\smile}{\mathbb{P}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)\,x\right\|\left\|\mathcal{I}_{0^+}^{(1-\rho)(\varrho-1),\upsilon} 1\right\| \\
&\leq \frac{N_0 L_0 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{(1-\rho)(\varrho-1)}(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\rho+\varrho(1-\rho))}\,\|x\| \\
&\leq C_1\,\|x\|\,.
\end{aligned}$$

Donc, les opérateurs $\overset{\smile}{\mathbb{P}}_{\upsilon}^{\rho}(t_1,s)$*,* $\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)$ *et* $\overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)$ *sont bornés.*

Ce qui montre (1).

(2) Nous prouvons d'abord que l'opérateur $\overset{\smile}{\mathbb{P}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)$ *est fortement continu.*

Pour chaque $x \in \mathcal{X}$ *et* $0 \leq s \leq t_1 < t_2 \leq \mathcal{T}$*, nous avons,*

$$\left\|\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_1,s)x - \overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_2,s)x\right\| = \left\|\int_0^{+\infty}\mathcal{E}^{-1}h_\rho(\Theta)\overset{\frown}{\mathbb{S}}\left[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t_1,s)\Theta\right]xd\Theta - \int_0^{+\infty}\mathcal{E}^{-1}h_\rho(\Theta)\overset{\frown}{\mathbb{S}}\left[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t_2,s)\Theta\right]xd\Theta\right\|$$

$$\leq N_0\left\|\overset{\frown}{\mathbb{S}}\left[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t_1,s)\Theta\right]x - \overset{\frown}{\mathbb{S}}\left[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(t_2,s)\Theta\right]x\right\|$$

Lorsque $t_2 - t_1 \to 0$*, on obtient*

$$\left\|\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_1,s)x - \overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_2,s)x\right\| \to 0$$

c'est-à-dire, $\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_1,s)$ *est fortement continue. D'après (2.6)-(2.7), on a également que* $\overset{\frown\rho}{\mathbb{T}}_{\upsilon}(t,s)$ *est fortement continue.*

Étant donné que $\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t,s)$ *est fortement continu, il est facile de prouver que* $\overset{\frown\rho,\varrho}{\mathbb{S}}_{\upsilon}(t,s)$ *est également fortement continu, en effet*

Pour chaque $x \in \mathcal{X}$ *et* $0 \leq s \leq t_1 < t_2 \leq \mathcal{T}$*, on a*

$$\begin{aligned}
&\left\|\overset{\frown\rho,\varrho}{\mathbb{S}}_{\upsilon}(t_1,s)x - \overset{\frown\rho,\varrho}{\mathbb{S}}_{\upsilon}(t_2,s)x\right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma((1-\rho)(1-\varrho))}\left\|\int_0^{t_2}\upsilon'(s)(\upsilon(t_2)-\upsilon(s))^{(1-\rho)(1-\varrho)-1}\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_2,s)x - \int_0^{t_1}\upsilon'(s)(\upsilon(t_1)-\upsilon(s))^{(1-\rho)(1-\varrho)-1}\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_1,s)x\right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma((1-\rho)(1-\varrho))}\left\|\int_{t_1}^{t_2}\upsilon'(s)(\upsilon(t_2)-\upsilon(s))^{(1-\rho)(1-\varrho)-1}\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_2,s)xds\right. \\
&-\int_0^{t_1}\upsilon'(s)\left[(\upsilon(t_2)-\upsilon(s))^{(1-\rho)(1-\varrho)-1}-(\upsilon(t_1)-\upsilon(s))^{(1-\rho)(1-\varrho)-1}\right]\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_2,s)xds \\
&\left.-\int_0^{t_1}\upsilon'(s)(\upsilon(t_1)-\upsilon(s))^{(1-\rho)(1-\varrho)-1}\left[\overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_1,s)x - \overset{\frown\rho}{\mathbb{P}}_{\upsilon}(t_1,s)x\right]\right\|
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $t_2 - t_1 \to 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{X}$ *et* $0 \leq s \leq t_1 < t_2 \leq \mathcal{T}$*. Ceci complète la preuve du lemme.*

2.3 La contrôlabilité approchée.

Dans cette section, nous formulons et prouvons les conditions d'existence ainsi que les résultats de contrôlabilité approchée, des équations υ-Hilfer fractional intégro-différentialles perturbées de type Sobolev (2.1), en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.

Nous imposons les hypothèses suivantes sur les données de notre problème (2.1)

($\mathbb{H}1$) $\overset{\frown}{\mathbb{S}}(t)$ est compacte pour $t > 0$.

($\mathbb{H}2$) a) La fonction non linéaire $\mathfrak{f}:\mathcal{J}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ est continue et il existe une fonction fractionnaire intégrable non décroissante $\vartheta\in\mathbf{L}^1(\mathcal{J},\mathbb{R})$, telle que

$$\|\mathfrak{f}(t,x_1(t),y_1(t))-\mathfrak{f}(t,x_2(t),y_2(t))\|\leq\vartheta(t)(\|x_1(t)-x_2(t)\|+\|y_1(t)-y_2(t)\|),$$

pour tout $t\in\mathcal{J}$, et $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathcal{X}$. De plus, $sup_{t\in\mathcal{J}}\|\mathfrak{f}(t,0,0)\|\leq\omega<\infty$.

b) La fonction $\mathfrak{f}:\mathcal{J}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ est continue et il existe une fonction $\nu\in\mathbf{L}^1(\mathcal{J})$ telle que,

$$\|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(t))\|=\|\mathfrak{f}(t,x(t),\mathfrak{I}^{\delta,\upsilon}x(t)\|\leq\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^\delta(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\delta+1)}\nu(t)=L\nu(t),$$

pour tout $t\in\mathcal{J}$ et $x\in\mathcal{X}$.

($\mathbb{H}3$) La fonction $\mathbf{g}:\mathsf{C}(\mathcal{J},\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ est continue et il existe une constante positive C_3 telle que,

$$\|\mathbf{g}(x)-\mathbf{g}(y)\|\leq C_3\|x-y\|,$$

pour tout $x,y\in\mathcal{X}$.

Lemme 2.3.1.

soit $\frac{1}{2}<\rho<1$, $0<\delta<1$. Alors, $\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}$ et $\mathfrak{I}_{0^+}^{\delta,\upsilon}$ sont bornés de $\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},\mathcal{X})$ en $\mathsf{C}(\mathcal{J},\mathcal{X})$, et nous avons

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\left[\vartheta(t)\left(\mathfrak{I}_{0^+}^{0,\upsilon}+\mathcal{I}_{0^+}^{\delta,\upsilon}\right)\|x(t)\|\right]\leq C_4\|x(t)\|.$$

Où,

$$C_4=\vartheta(T)\left[\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\rho+1)}+\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^{\rho+\delta}(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\rho+\delta+1)}\right].$$

Démostration 2.3.1.

*En vu de ($\mathbb{H}2$) et **Définition 1.4.3.**, on obtient*

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(t))\|\leq\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\left[\vartheta(t)\left(\|x(t)\|+\|\mathfrak{I}_{0^+}^{\delta,\upsilon}x(t)\|\right)\right]$$

$$\leq\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\left[\vartheta(t)\left(\mathfrak{I}_{0^+}^{0,\upsilon}+\mathfrak{I}_{0^+}^{\delta,\upsilon}\right)\|x(t)\|\right]$$

$$\leq\left[\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\vartheta(t)+\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho+\delta,\upsilon}\vartheta(t)\right]\|x(t)\|$$

$$\leq\left[\frac{1}{\Gamma(\rho)}\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(t,0)}{\rho}\vartheta(t)+\frac{1}{\Gamma(\rho+\delta)}\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^{\rho+\delta}(t,0)}{\rho+\delta}\vartheta(t)\right]\|x(t)\|.$$

Puisque $t \in \mathcal{J}$, *on a*

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho;\upsilon}\|\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(t))\| \leq \vartheta(T)\left[\frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\rho+1)} + \frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho+\delta}(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\rho+\delta+1)}\right]\|x(t)\|.$$

Pour étudier la contrôlabilité approchée du système rétrograde υ-Hilfer fractionnaire non local de type Sobolev (2.1), nous introduisons le système de contrôle rétrograde linéaire υ-fractionnaire perturbé de type Sobolev associé à (2.1)

$$\begin{cases} {}^{H}\mathfrak{D}^{\rho,\varrho,\upsilon}[\mathcal{E}x(t)] = (\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})x(t) + \mathcal{B}u(t), \quad t \in (0,\mathcal{T}] \\ x(\mathcal{T}) = x_{\mathcal{T}}, \end{cases} \tag{2.10}$$

Il convient à cette étape d'introduire les opérateurs, Gramian de controllabilité et le résolvant associés à (2.10), comme suit

$$\Gamma_0^{\mathcal{T}} = \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(0))^{2\rho-2}\overset{\backsim\rho}{\mathbb{T}}_{\upsilon}(0,s)\mathcal{B}\mathcal{B}^*\big(\overset{\backsim\rho}{\mathbb{T}}_{\upsilon}\big)^*(0,s)ds, \quad \frac{1}{2} < \rho < 1, \tag{2.11}$$

où $\mathcal{B}^*$ et $\big(\overset{\backsim\rho}{\mathbb{T}}_{\upsilon}\big)^*$ désigne l'adjoint de $\mathcal{B}$ et $\big(\overset{\backsim\rho}{\mathbb{T}}_{\upsilon}\big)$, respectivement. et pour $\alpha > 0$;

$$\mathfrak{R}(\alpha, -\Gamma_0^{\mathcal{T}}) = (\alpha\mathbb{I} + \Gamma_0^{\mathcal{T}})^{-1} et \quad \|\alpha\mathfrak{R}(\alpha; -\Gamma_0^{\mathcal{T}})\| \leq 1; \tag{2.12}$$

Soit $x(0) = x(u)(0)$ la valeur d'état du système (2.10) au temps initial $t = 0$ correspondant à la contrôle u. Nous introduisons l'ensemble $\mathbb{W}(0) = \left\{x(u)(0), u \in \mathbf{L}^2(\mathcal{J},\mathcal{U})\right\}$, appelé ensemble atteignable du système de contrôle linéaire rétrograde υ-fractionnaire (2.10) à l'instant initial $t = 0$, et notons sa fermeture dans $\mathcal{X}$ par $\overline{\mathbb{W}(0)}$.

Lemme 2.3.2. *([45])*

Le système linéaire de contrôle υ-Hilfer fractionnaire (2.10) *est approximativement contrôlable sur $\mathcal{J}$ si et seulement si l'opérateur $\alpha\mathfrak{R}(\alpha,\Gamma_0^{\mathcal{T}}) \to 0$, lorsque $\alpha \to 0^+$.*

Remarque 2.3.1.

La contrôlabilité approchée pour le système de contrôle rétrograde linéaire υ-Hilfer fractionnaire (2.10)*, est une généralisation naturelle de la contrôlabilité approchée du système de contrôle linéaire du premier ordre ($\rho = \varrho = 1$, $\upsilon(t) = t$ et $\mathcal{E}$ est l'identité).[76]*

Maintenant, pour un $P \in \mathcal{X}$ donné, $\frac{1}{2} < \rho < 1$ et $\alpha > 0$, nous définissons la fonction de contrôle sous la forme suivante :

$$u^{\alpha}(t) = -\frac{1}{\alpha}(\upsilon(t) - \upsilon(0))^{\rho-1}\mathcal{B}^{*}(\mathbb{T}_{\upsilon}^{\rho})^{*}(t,0)[x(0) - P]; \quad sur \ [0; \mathcal{T}] \tag{2.13}$$

Tout d'abord, nous introduisons un lemme qui donne une formule pour $x(0)$ en termes de P, $x_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}$.

Lemme 2.3.3.

Pour un arbitraire $P \in \mathcal{X}$, le contrôle (2.13) transfère P à l'état,

$$\begin{aligned} x(0) \quad = \quad & P + \alpha\mathfrak{R}(\alpha, -\Gamma_0^{\mathcal{T}})\Big[\overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] \\ + \quad & \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,0)\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))ds - P\Big] \end{aligned} \tag{2.14}$$

à l'instant $\mathcal{T}$.

Démostration 2.3.2.

En substituant (2.13) dans (2.4), on peut obtenir la formule (2.14)

$$\begin{aligned} x(0) = & \overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] \\ & + \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,0)[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s)]ds \\ & = \overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] + \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,0)\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))ds \\ & - \frac{1}{\alpha}\int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1} \times \overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,0)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\mathcal{B}\mathcal{B}^{*}(\overset{\smile}{\mathcal{T}}_{\upsilon}^{\rho})^{*}(s,0)[x(0) - P]ds \\ & = \overset{\smile}{\mathcal{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] + \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,0)\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))ds \\ & - \frac{1}{\alpha}\Gamma_0^{\mathcal{T}}[x(0) - P]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{I} + \frac{1}{\alpha}\Gamma_0^{\mathcal{T}}\right)[x(0) - P] = & \overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] \\ & + \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,0)\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s))ds - P \\ \left(\alpha\mathbb{I} + \Gamma_0^{\mathcal{T}}\right)[x(0) - P] = & \alpha(x(\prime) - P) \end{aligned}$$

$$x(0) - P = \alpha\left(\alpha\mathbb{I} + \Gamma_0^{\mathcal{T}}\right)^{-1}(x(\prime) - P) = \alpha\mathfrak{R}(\alpha, -\Gamma_0^{\mathcal{T}})(x(\prime) - P).$$

Lemme 2.3.4. *([47])*

Il existe une constante réelle positive Υ *telle que, pour* $\alpha > 0$ *et* $P \in \mathcal{X}$*, on a*

$$\|x(0) - P\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \leq \Upsilon,$$

$$\|u^{\alpha}(t)\|_{L^2(\mathcal{J},\mathcal{U})} \leq \frac{1}{\alpha}\|\mathcal{B}^*\| C_2 \Upsilon,$$

avec,

$$\Upsilon = C_1 C_0 \Big[\|x_{\mathcal{T}}\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} + C_3\|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} + \|\mathbf{g}(0)\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} + C_2 L \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\rho+\lambda)} \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(\mathcal{T}, 0)\|\nu\|_{L^1} + \|P\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \Big].$$

Démostration 2.3.3.

En utilisant ($\mathbb{H}1$*) et (*$\mathbb{H}2$***)(b)**, on obtient les estimations.*

2.3.1 Existence d'une solution douce.

Théorème 2.3.1.

Supposons que les hypothèses ($\mathbb{H}1$*)-(*$\mathbb{H}3$*) soient satisfaites. Alors, pour tout* $P \in \mathcal{X}$ *et* $\alpha > 0$*, le système de contrôle* υ*-Hilfer fractionnaire rétrograd perturbé de type Sobolev (2.1), a une solution douce sur* $[0, \mathcal{T}]$.

Démostration 2.3.4.

Pour tout $\alpha > 0$*, définissons l'opérateur* $\mathbb{F}_{\alpha} : \mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ *par*

$$\mathbb{F}_{\alpha} x(t) = \overset{\backsim\rho,\varrho}{\mathbb{S}_{\upsilon}}(\mathcal{T}, t)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)]$$

$$+ \int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(t))^{\rho-1} \overset{\backsim\rho}{\mathbb{T}_{\upsilon}}(s, t)[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s)]ds.$$

Avec le contrôle u donné par l'équation (2.13).

Il sera démontré que pour tout $\alpha > 0$*, l'opérateur* $\mathbb{F}_{\alpha} : \mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J}, \mathcal{X})$ *a un point fixe. Pour prouver cela, nous utiliserons le théorème du point fixe de Schauder. Pour démontrer ce résultat, nous divisons la preuve en quatre étapes.*

Étape 1.

Nous allons prouver que pour tout $\alpha > 0$*, il existe un nombre positif* $\varepsilon := \varepsilon(\alpha)$ *tel que* $\mathbb{F}_{\alpha}(\mathbb{B}_{\varepsilon}) \subset \mathbb{B}_{\varepsilon}$*, où*

$$\mathbb{B}_{\varepsilon} := \{x \in \mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon} : \|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \leq \varepsilon\} \quad \textit{avec} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Soit $\alpha > 0$ fixé et $x \in \mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}$, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)(\mathbb{F}_\alpha x)(t)\right\| \leq & \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t)\mathcal{M}^{-1}[x_\mathcal{T}+\mathbf{g}(x)]\right\| \\ & + \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\int_t^\mathcal{T} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))ds\right\| \\ & + \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\int_t^\mathcal{T} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)\mathcal{B}u^\alpha(s)ds\right\| \\ & =: \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3.\end{aligned}$$

Par la condition $(\mathbb{H}3)$ *et* ***Lemma 2.2.3****, nous avons*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 & \leq \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t)\mathcal{M}^{-1}[x_\mathcal{T}+\mathbf{g}(x)]\right\| \\ & \leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)\left\|\overset{\frown}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t)\right\|\|\mathcal{M}^{-1}\|\left\|x_\mathcal{T}+\mathbf{g}(x)-\mathbf{g}(0)+\mathbf{g}(0)\right\| \\ & \leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_1C_0\Big[\|x_\mathcal{T}\|+\|\mathbf{g}(x)-\mathbf{g}(0)\|+\|\mathbf{g}(0)\|\Big]\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_1 \leq C_1\Big[\|x_\mathcal{T}\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}+C_3\|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}+\|\mathbf{g}(0)\|_{\mathcal{C}_{1-\lambda,\upsilon}}\Big]=\varepsilon_1. \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 & \leq \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\int_t^\mathcal{T} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))ds\right\| \\ & \leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_2\bigg(\int_0^\mathcal{T} \upsilon'(s)(\upsilon(\mathcal{T})-\upsilon(s))^{\rho-1}\left\|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))\right\|ds \\ & + \int_0^t \upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{\rho-1}\left\|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))\right\|ds\bigg) \\ & \leq 2\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_2\int_0^\mathcal{T} \upsilon'(s)(\upsilon(\mathcal{T})-\upsilon(s))^{\rho-1}\left\|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(\mathcal{T}))\right\|ds \\ & \leq 2\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_2\Gamma(\rho)\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\left\|\mathcal{K}_\upsilon^\gamma(x(\mathcal{T}))\right\|\end{aligned}$$

Il découle de la condition $(\mathbb{H}2)$ *et du* ***Lemme 2.3.1*** *que*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 & \leq 2\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_2\Gamma(\rho)\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\bigg(\left\|\mathfrak{f}\Big(\mathcal{T},x(\mathcal{T}),\mathfrak{I}_{0^+}^{\delta,\upsilon}x(\mathcal{T})\Big)-\mathfrak{f}(\mathcal{T},0,0)\right\|+\left\|\mathfrak{f}(\mathcal{T},0,0)\right\|\bigg) \\ & \leq 2\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_2\Gamma(\rho)\bigg(C_4\|x(\mathcal{T})\|+\frac{\omega\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(\mathcal{T},0)}{\Gamma(\rho+1)}\bigg)\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_2 \leq 2C_2\bigg(C_4\Gamma(\rho)\|x(\mathcal{T})\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}+\frac{\omega\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda+\rho}(\mathcal{T},0)}{\rho}\bigg)=\varepsilon_2. \tag{2.16}$$

Ensuite, observons que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3 & \leq \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\int_t^\mathcal{T} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)\mathcal{B}u^\alpha(s)ds\right\| \\ & \leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)\int_t^\mathcal{T} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\left\|\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)\right\|\|\mathcal{B}\|\|u^\alpha(s)\|ds \\ & \leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_2\|\mathcal{B}\|\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(\mathcal{T},t)}{\rho}\left\|u^\alpha(s)\right\|_{L^2(J,U)}\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_3 \leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_2\|\mathcal{B}\|\frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(\mathcal{T},t)}{\rho}\frac{1}{\alpha}\|\mathcal{B}^*\|C_2\Upsilon = \varepsilon_3. \tag{2.17}$$

De (2.15)–(2.17), nous obtenons

$$\|(\mathbb{F}_\alpha x)(t)\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon.$$

Par conséquent, nous concluons que l'opérateur $\mathbb{F}_\alpha$ se transforme en lui-même.

Étape 2.

Nous allons prouver que $\Big\{\mathbb{F}_\alpha x : \|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \leq \varepsilon\Big\}$ *est équicontinue.*

Pour $0 < t_1 < t_2 < \mathcal{T}$, nous avons

$$\Big\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)(\mathbb{F}_\alpha x)(t_2) - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)(\mathbb{F}_\alpha x)(t_1)\Big\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Big\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t_2)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}}+\mathbf{g}(x)] - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t_1)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}}+\mathbf{g}(x)]\Big\| \\
&+ \Big\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)\int_{t_2}^{\mathcal{T}}\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t_2))^{\rho-1}\Big[\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t_2) - \overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t_1)\Big]\Big[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s)\Big]ds \\
&+ \Big\|\int_{t_2}^{\mathcal{T}}\upsilon'(s)\Big[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)(\upsilon(s)-\upsilon(t_2))^{\rho-1} - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)(\upsilon(s)-\upsilon(t_1))^{\rho-1}\Big]\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t_1)\Big[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s)\Big]ds \\
&+ \Big\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)\int_{t_1}^{t_2}\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t_1))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t_1)\Big[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s)\Big]ds\Big\|
\end{aligned}$$

$$\leq \mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_5 + \mathcal{I}_6 + \mathcal{I}_7.$$

Pour $0 < t_1 < t_2 < \mathcal{T}$, on a

$$\mathcal{I}_4 \leq C_0\Big\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t_2)[x_{\mathcal{T}}+\mathbf{g}(x(t_2))] - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t_1)[x_{\mathcal{T}}+\mathbf{g}(x(t_1))]\Big\|.$$

*Par le **Lemma 2.2.3**, on sait que $\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t)$ est uniformément continu sur $\mathcal{J}$, ce qui nous permet de déduire que $\underset{t_2\to t_1}{\mathcal{I}_4} = 0$.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_5 \leq{}& \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)\int_{t_2}^{\mathcal{T}}\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t_2))^{\rho-1}\Big\|\Big[\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t_2) - \overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t_1)\Big]\Big\| \\
&\times\Big\|\Big[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s)\Big]\Big\|ds.
\end{aligned}$$

Puisque la compacité de $\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t)$ $(s,t>0)$ implique la continuité de $\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t)$ $(s,t>0)$ dans la topologie d'opérateur uniforme, on peut facilement voir que $\underset{t_2\to t_1}{\mathcal{I}_5} = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_6 \leq{}& \int_{t_2}^{\mathcal{T}}\Big\|\upsilon'(s)\Big[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)(\upsilon(s)-\upsilon(t_2))^{\rho-1} - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)(\upsilon(s)-\upsilon(t_1))^{\rho-1}\Big]\Big\| \\
&\times\overset{\frown}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t_1)\Big\|\Big[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s)\Big]\Big\|ds.
\end{aligned}$$

En notant que

$$\left\| \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t_2))^{\rho-1} - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t_1))^{\rho-1} \right\| m(s) \leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t_1))^{\rho-1} m(s)$$

et $\int_{t_2}^{\mathcal{T}} \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t_1))^{\rho-1} m(s)ds$ *existe, il découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue que*

$$\int_{t_2}^{\mathcal{T}} \left\| \upsilon'(s) \left[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_2,0)(\upsilon(s)-\upsilon(t_2))^{\rho-1} - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\lambda}(t_1,0)(\upsilon(s)-\upsilon(t_1))^{\rho-1} \right] \right\| m(s)ds \to 0,$$

quand $t_2 \to t_1$*, il s'ensuit que* $\underset{t_2 \to t_1}{\mathcal{I}_6} = 0.$

En utilisant la condition ($\mathbb{H}2$)*(b), on déduit que* $\underset{t_2 \to t_1}{\mathcal{I}_7} = 0.$ *Ainsi,* $\left\{ \mathbb{F}_{\alpha} x : \|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \leq \varepsilon \right\}$ *est équicontinue.*

Étape 3.

Nous prouvons que l'ensemble $\left\{ \mathbb{F}_{\alpha} x : \|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda;\upsilon}} \leq \varepsilon \right\}$ *est relativement compact dans* $\mathcal{X}$ *pour tout* $t \in \mathcal{J}$*.*

Soit $0 \leq t < \mathcal{T}$ *fixé et* β *un nombre réel vérifiant* $0 < \beta < \mathcal{T} - t$*. Pour* $\epsilon > 0$*, définissons l'opérateur* $\mathbb{F}_{\alpha}^{\beta,\epsilon}$ *par*

$$\mathbb{F}_{\alpha}^{\beta,\epsilon} x(t) = \mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\rho)(\varrho-1),\upsilon} \mathcal{E}^{-1}\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(x)] \breve{\mathbb{S}} \Big(\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(\beta,0)\epsilon \Big)$$

$$\times \int_{\epsilon}^{+\infty} h_{\rho}(\Theta) \breve{\mathbb{S}} \Big[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(\mathcal{T},s)\Theta - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(\beta,0)\epsilon \Big] d\Theta$$

$$+ \mathcal{E}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\rho \breve{\mathbb{S}} \Big(\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(\beta,0)\epsilon \Big) \int_{t+\beta}^{\mathcal{T}} \int_{\epsilon}^{+\infty} \upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1} \Theta h_{\rho}(\Theta)$$

$$\times \breve{\mathbb{S}} \Big[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(s,t)\Theta - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{\rho}(\beta,0)\epsilon \Big] d\Theta \Big[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(x(s)) + \mathcal{B}u^{\alpha}(s) \Big] ds.$$

Puisque $\breve{\mathbb{S}}(t)$ *est un opérateur compact, l'ensemble* $\left\{ \mathbb{F}_{\alpha}^{\beta,\epsilon} x : \|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda;\upsilon}} \leq \varepsilon \right\}$ *est relativement compact dans* $\mathcal{X}$*. De plus. pour chaque* $x \in \mathcal{B}_{\varepsilon}$*, nous avons*

$$\begin{aligned}\Big\|\mathbb{F}_\alpha x(t)-\mathbb{F}_\alpha^{\beta,\epsilon}x(t)\Big\| &\le \mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\rho)(\varrho-1),\upsilon}(t)\Big\|\mathcal{E}^{-1}\mathcal{M}^{-1}[x_\mathcal{T}+\mathbf{g}(x)]\int_0^\epsilon h_\rho(\Theta)\breve{\mathbb{S}}\Big[\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(\mathcal{T},s)\Theta\Big]d\Theta\Big\|\\
&+\mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\rho)(\varrho-1),\upsilon}(\beta)\Big\|\mathcal{E}^{-1}\mathcal{M}^{-1}[x_\mathcal{T}+\mathbf{g}(x)]\int_\epsilon^{+\infty} h_\rho(\Theta)\breve{\mathbb{S}}\Big[\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(\mathcal{T},s)\Theta\Big]d\Theta\Big\|\\
&+\rho\Big\|\mathcal{E}^{-1}\int_t^\mathcal{T}\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\int_0^\epsilon\Theta h_\rho(\Theta)\times\breve{\mathbb{S}}\Big[\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(s,t)\Theta\Big]\\
&\times\Big[\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))+\mathcal{B}u^\alpha(s)\Big]d\Theta ds\Big\|\\
&+\rho\Big\|\mathcal{E}^{-1}\int_t^{t+\beta}\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\int_\epsilon^\infty\Theta h_\rho(\Theta)\times\breve{\mathbb{S}}\Big[\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(s,t)\Theta\Big]\\
&\times\Big[\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))+\mathcal{B}u^\alpha(s)\Big]d\Theta ds\Big\|\\
&=:\mathcal{I}_8+\mathcal{I}_9+\mathcal{I}_{10}+\mathcal{I}_{11}.\end{aligned}$$

Un argument similaire à celui précédent donne

$$\mathcal{I}_8\le\frac{C_0N_0L_0\mathcal{Q}_\upsilon^{(1-\rho)(\varrho-1)}(t,0)}{\Gamma(\varrho(1-\rho)+\rho)}\Big(\int_0^\epsilon h_\rho(\Theta)d\Theta\Big)(\|x_\mathcal{T}\|+C_3\|x\|+\|\mathbf{g}(0)\|),$$

$$\mathcal{I}_9\le\frac{C_0N_0L_0\mathcal{Q}_\upsilon^{(1-\rho)(\varrho-1)}(\beta,0)}{\Gamma(\varrho(1-\rho)+\rho)}\Big(\int_\epsilon^{+\infty} h_\rho(\Theta)d\Theta\Big)(\|x_\mathcal{T}\|+C_3\|x\|+\|\mathbf{g}(0)\|),$$

$$\mathcal{I}_{10}\le\rho N_0L_0\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(\mathcal{T},t)}{\rho}\Big(\int_0^\epsilon\Theta h_\rho(\Theta)d\Theta\Big)\Big(L\|\nu\|_{L^1}+\|\mathcal{B}\|\frac{1}{\alpha}\|\mathcal{B}^*\|C_2\Upsilon\Big),$$

$$\mathcal{I}_{11}\le\rho N_0L_0\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^\rho(t+\beta,t)}{\rho}\Big(\int_\epsilon^{+\infty}\Theta h_\rho(\Theta)d\Theta\Big)\Big(L\|\nu\|_{L^1}+\|\mathcal{B}\|\frac{1}{\alpha}\|\mathcal{B}^*\|C_2\Upsilon\Big).$$

En utilisant le fait que $\int_0^{+\infty}h_\rho(\Theta)d\Theta=1$ *et* $\int_0^{+\infty}\Theta^\zeta h_\rho(\Theta)d\Theta=\frac{\Gamma(1+\zeta)}{\Gamma(1+\rho\zeta)}$*, il s'ensuit que*

$$\mathcal{I}_8\to0,\quad\mathcal{I}_9\to0,\quad\mathcal{I}_{10}\to0,\quad\mathcal{I}_{11}\to0,\quad\textit{quand}\quad\beta\to0^+,\quad\epsilon\to0^+.$$

En conséquence, pour chaque $x\in\mathbb{B}_\varepsilon$,

$$\Big\|\mathbb{F}_\alpha x(t)-\mathbb{F}_\alpha^{\beta,\epsilon}x(t)\Big\|\to0\quad\textit{quand}\quad\beta\to0^+,\quad\epsilon\to0^+.$$

Par conséquent, l'ensemble $\Big\{\mathbb{F}_\alpha x:\|x\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda;\upsilon}}\le\varepsilon\Big\}$ *est relativement compact dans* $\mathcal{X}$ *pour chaque* $t\in\mathcal{J}$.

Étape 4.

$\mathbb{F}_\alpha:\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},X)\to\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}(\mathcal{J},X)$ *est continu sur* $\mathbb{B}_\varepsilon$.

Soit x_n *une suite telle que* $x_n\to x$ *dans* $\mathbb{B}_\varepsilon$*. Par (*$\mathbb{H}2$*)(a)-(*$\mathbb{H}3$*) et* ***Lemme 2.3.1****, on obtient*

$$\mathbf{g}(x_n)\to\mathbf{g}(x)\quad\textit{quand}\quad n\to\infty,$$

$$\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x_n(s))\to\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))\quad\textit{quand}\quad n\to\infty,$$

et

$$\|\mathbf{g}(x_n) - \mathbf{g}(x)\| \leq C_3\|x_n - x\|,$$

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x_n(s)) - \mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))\| \leq C_4\|x_n - x\|.$$

Alors, pour chaque $t \in \mathcal{J}$*, on a*

$$\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)(\mathbb{F}_\alpha x_n)(t) - \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)(\mathbb{F}_\alpha x)(t)\|$$

$$\leq \|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\overset{\frown}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},t)\mathcal{M}^{-1}[\mathbf{g}(x_n) - \mathbf{g}(x)]\|$$

$$+ \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)[\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x_n(s)) + \mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(s))]ds\right\|$$

$$\leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_1C_0\|\mathbf{g}(x_n) - \mathbf{g}(x)\| + 2C_2\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)\Gamma(\rho)\mathfrak{I}_{0^+}^{\rho,\upsilon}\left\|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(x_n(\mathcal{T})) - \mathcal{K}_\upsilon^\delta(x(\mathcal{T}))\right\|.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\|(\mathbb{F}_\alpha x_n)(t) - (\mathbb{F}_\alpha x)(t)\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \to 0, \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Par conséquent, $\mathbb{F}_\alpha$ *est continu.*

Ainsi, d'après le théorème du point fixe de Schauder, $\mathbb{F}_\alpha$ *a un point fixe. Par conséquent, le système de contrôle rétrograde* υ*-Hilfer fractionnaire de type Sobolev* (2.1) *a une solution douce sur* $\mathcal{J}$*. La preuve est complète.*

2.3.2 Résultats de contrôlabilité approchée

Théorème 2.3.2.

Supposons que les hypothèses ($\mathbb{H}$1)-($\mathbb{H}$3)*soient satisfaites . De plus, si les fonctions* $\mathfrak{f}$ *et* $\mathbf{g}$ *sont uniformément bornées et* $\left\{\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(t,s), s,t > 0\right\}$ *est compact, alors le système de contrôle* υ*-Hilfer fractionnaire rétrograde perturbé de type Sobolev* (2.1) *est approximativement contrôlable sur* $\mathcal{J}$*.*

Démostration 2.3.5.

Soit $\widehat{x}_\alpha$ *un point fixe de* $\mathbb{F}_\alpha$ *dans* $\mathbb{B}_{\varepsilon(\alpha)}$*. Alors, en tant que point fixe,* $\mathbb{F}_\alpha(\widehat{x}_\alpha)$ *est une solution douce de* (2.1) *sur* $\mathcal{J}$ *sous le contrôle*

$$\widehat{\varphi}_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}(\upsilon(t) - \upsilon(0))^{\rho-1}\mathcal{B}^*\left(\overset{\frown}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}\right)^*(t,0)\alpha\mathfrak{R}(\alpha, -\Gamma_0^{\mathcal{T}})\widehat{x}_\alpha(t),$$

et elle satisfait

$$\widehat{x}_\alpha(0) - P = \alpha\Re(\alpha, -\Gamma_0^{\mathcal{T}})\widehat{x}_\alpha(\mathcal{T}), \tag{2.18}$$

où

$$\widehat{x}_\alpha(\mathcal{T}) = \overset{\backsim}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha)]$$

$$+ \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\backsim}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,0)\mathcal{K}_\upsilon^\delta(\widehat{x}_\alpha(s))ds - P$$

Maintenant, compte tenu de ($\mathbb{H}2$)*(b) et* ($\mathbb{H}3$)*, on a*

$$\int_t^{\mathcal{T}} \|\mathcal{K}_\upsilon^\delta(\widehat{x}_\alpha(s))\|^2 ds \leq L^2 \int_0^{\mathcal{T}} \nu^2(s)ds$$

$$\int_t^{\mathcal{T}} \|\mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha(s))\|^2 ds \leq C_3^2\mathcal{T}.$$

Par conséquent, les séquences $\Big\{\mathcal{K}_\upsilon^\delta(\widehat{x}_\alpha(s))\Big\}$, $\Big\{\mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha(s))\Big\}$ *sont bornées. En tant que tel, il existe une sous-séquence, toujours notée* $\Big\{\mathcal{K}_\upsilon^\delta(\widehat{x}_\alpha(s))\Big\}$, $\Big\{\mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha(s))\Big\}$ *qui converge faiblement vers* $\{\mathfrak{f}(s)\}$,$\{\mathbf{g}(s)\}$ *dans* $\mathbf{L}^2(\mathcal{J},\mathcal{X})$.

Définissons

$$\widehat{x}_\alpha = \overset{\backsim}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}[x_{\mathcal{T}} + \mathbf{g}(s)]$$

$$+ \int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\backsim}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,0)\mathfrak{f}(s)ds - P.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{x}_\alpha(\mathcal{T}) - \widehat{x}_\alpha\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} &\leq \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\overset{\backsim}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\mathcal{M}^{-1}\Big(\mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha(s)) - \mathbf{g}(s)\Big)\right\| \\
&+ \left\|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(t,0)\int_0^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(0))^{\rho-1}\overset{\backsim}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,0)\Big[\mathcal{K}_\upsilon^\delta(\widehat{x}_\alpha(s)) - \mathfrak{f}(s)\Big]ds\right\| \\
&\leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)C_0\left\|\overset{\backsim}{\mathbb{S}}_\upsilon^{\rho,\varrho}(\mathcal{T},0)\Big(\mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha(s)) - \mathbf{g}(s)\Big)\right\| \\
&+ \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\lambda}(\mathcal{T},0)\underset{t\in\mathcal{J}}{sup}\left\|\int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\backsim}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)\Big[\mathcal{K}_\upsilon^\delta(\widehat{x}_\alpha(s)) - \mathfrak{f}(s)\Big]ds\right\| \\
&\leq C_0C_1\Big\|\mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha(s)) - \mathbf{g}(s)\Big\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}} \\
&+ \underset{t\in\mathcal{J}}{sup}\left\|\int_t^{\mathcal{T}} \upsilon'(s)(\upsilon(s) - \upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\backsim}{\mathbb{T}}_\upsilon^{\rho}(s,t)\Big[\mathcal{K}_\upsilon^\delta(\widehat{x}_\alpha(s)) - \mathfrak{f}(s)\Big]ds\right\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}.
\end{aligned}$$

Par la compacité à la fois de $\overset{\smile}{\mathbb{S}}_{\upsilon}^{\rho,\varrho}(t,s)$ *et* $\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(t,s)$*, on peut dire que*

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left\|\mathbf{g}(\widehat{x}_\alpha(s))-\mathbf{g}(s)\right\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}=0.$$

Et

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\sup_{t\in\mathcal{J}}\left\|\int_t^{\mathcal{T}}\upsilon'(s)(\upsilon(s)-\upsilon(t))^{\rho-1}\overset{\smile}{\mathbb{T}}_{\upsilon}^{\rho}(s,t)\left[\mathcal{K}_{\upsilon}^{\delta}(\widehat{x}_\alpha(s))-\mathfrak{f}(s)\right]ds\right\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}=0.$$

Ceci implique que

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\|\widehat{x}_\alpha(\mathcal{T})-\widehat{x}_\alpha\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}=0 \tag{2.19}$$

En utilisant l'équation (2.18)*, nous avons*

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}_\alpha(0)-P\|_{\mathcal{C}_{1-\lambda,\upsilon}} &\leq \|\alpha\mathfrak{R}(\alpha,-\Gamma_0^{\mathcal{T}})(\widehat{x}_\alpha(\mathcal{T})-\widehat{x}_\alpha)\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}+\|\alpha\mathfrak{R}(\alpha,-\Gamma_0^{\mathcal{T}})(\widehat{x}_\alpha)\|_{\mathcal{C}_{1-\lambda,\upsilon}}\\ &\leq \|\widehat{x}_\alpha(\mathcal{T})-\widehat{x}_\alpha\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}+\|\alpha\mathfrak{R}(\alpha,-\Gamma_0^{\mathcal{T}})(\widehat{x}_\alpha)\|_{\mathsf{C}_{1-\lambda,\upsilon}}.\end{aligned}$$

D'autre part, selon (2.12) *et le* ***Lemme 2.3.2****, il s'ensuit que*

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\|\widehat{x}_\alpha(0)-P\|_{\mathcal{C}_{1-\lambda,\upsilon}}=0.$$

Par conséquent, nous concluons la contrôlabilité approchée de (2.1).

2.4 Exemple

Dans cette section, un exemple est donné pour illustrer nos résultats théoriques.

Considérons l'équation aux dérivées partielles υ-Hilfer fractionnaire de type Sobolev de avec contrôle suivante:

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathfrak{D}^{\frac{3}{5},\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}[x(t,\mathsf{z})-x_{\mathsf{zz}}(t,\mathsf{z})] &= \frac{\partial^2}{\partial\mathsf{z}^2}x(t,\mathsf{z})+\eta(t,\mathsf{z})+e^{-t}+\frac{tan^{-1}|x(t,\mathsf{z})|}{4+t}\\ &+ \frac{2sin|x(t,\mathsf{z})|}{4+t}.\frac{|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}x(t,\mathsf{z})|}{2+|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}x(t,\mathsf{z})|},\quad (t,\mathsf{z})\in(0,1]\times[0,\pi],\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{4}{15},e^{\frac{t}{2}}}[x(t,\mathsf{z})-x_{\mathsf{z}}(t,\mathsf{z})]_{t=\mathcal{T}}-\frac{1}{15}x(t,\mathsf{z})=x_{\mathcal{T}}(\mathsf{z}), \tag{2.21}$$

$$x(t,0)=x(t,\pi)=0, \tag{2.22}$$

où ${}^{H}\mathfrak{D}^{\frac{3}{5},\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}$ est la dérivée fractionnaire de υ-Hilfer d'ordre $\rho = \frac{3}{5}$, $\varrho = \frac{1}{3}$, $\upsilon(t) = e^{\frac{t}{2}}$ et $0 < \lambda < 1$. De plus, $\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}$ est l'intégrale fractionnaire de υ-Riemann-Liouville d'ordre $\delta = \frac{1}{3}$ et $\upsilon(t) = e^{\frac{t}{2}}$.

Soit $x(t)(\mathsf{z}) = x(t,\mathsf{z})$ et les fonctions définies comme

$$\mathfrak{f}\left(t, x(t), \mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}} x(t)\right)(\mathsf{z}) = e^{-t} + \frac{tan^{-1}|x(t,\mathsf{z})|}{4+t} + \frac{2sin|x(t,\mathsf{z})|}{4+t} \cdot \frac{|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}} x(t,\mathsf{z})|}{2 + |\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}} x(t,\mathsf{z})|}$$

$$\mathbf{g}(x)(\mathsf{z}) = \frac{1}{15} x(t,\mathsf{z}).$$

L'opérateur linéaire borné $\mathcal{B} : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ est défini par

$$\mathcal{B}u(t)(\mathsf{z}) = \eta(t,\mathsf{z}), \quad 0 \le \mathsf{z} \le 1, \quad u \in \mathcal{U}.$$

On choisit l'espace $\mathcal{X} = \mathcal{U} = \mathbf{L}^2[0,\pi]$, et on définit les opérateurs $\mathcal{E} : \mathbb{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V} : \mathbb{D}(\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $\mathcal{M} : \mathbb{D}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ par $\mathcal{E}x = x - x_{\mathsf{zz}}$, $(\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V})x = -x_{\mathsf{zz}}$ et $\mathcal{M}^{-1}x = x_{\mathsf{zz}}$, où les domaines $\mathbb{D}(\mathcal{E}), \mathbb{D}(\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V})$ et $\mathbb{D}(\mathcal{M})$ sont donnés par

$$\Big\{ \quad x \in \mathcal{X} : x, x_{\mathsf{z}} \quad sont \quad absolument \quad continuées, \quad x_{\mathsf{zz}} \in \mathcal{X}, \quad x(0) = x(\pi) = 0 \Big\}.$$

Alors, $\mathcal{E}$, $\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V}$ et $\mathcal{M}$ peuvent s'écrire respectivement comme

$$\mathcal{E}x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)(x, x_n)x_n, \quad x \in \mathbb{D}(\mathcal{E}),$$

$$(\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V})x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2(x, x_n)x_n, \quad x \in \mathbb{D}(\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V}),$$

$$\mathcal{M}^{-1}x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(x, x_n)x_n, \quad x \in \mathbb{D}(\mathcal{M}),$$

où $x_n(\mathsf{w}) = (\sqrt{2/\pi}) \sin n\mathsf{w}$, $n = 1, 2, ...$ est l'ensemble orthogonal des fonctions propres de $(\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V})$. De plus, pour tout $x \in X$ nous avons

$$\mathcal{E}^{-1}x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}(x, x_n)x_n,$$
$$(\mathcal{V} + \Delta\mathcal{V})\mathcal{E}^{-1}x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2}{1+n^2}(x, x_n)x_n,$$
$$\breve{\mathbb{S}}(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} exp\left(\frac{-n^2 t}{1+n^2}\right)(x, x_n)x_n.$$

De plus, l'opérateur $\overset{\backsim}{\mathbb{T}}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(t,s)$ peut être défini par

$$\overset{\backsim}{\mathbb{T}}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(t,s)=\frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\mathcal{E}^{-1}\Theta h_{\frac{3}{5}}(\Theta)\,\breve{\mathbb{S}}\left[\mathcal{Q}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(t,s)\right]\Theta d\Theta.$$

$$\overset{\backsim}{\mathbb{T}}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(t,s)\,x=\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\int_0^{+\infty}\Theta h_{\frac{3}{5}}(\Theta)\,exp\bigg(\frac{-n^2}{1+n^2}\left[\mathcal{Q}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(t,s)\right]\Theta\bigg)ds(x,x_n)x_n.$$

Soit $\mathcal{K}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(x(t))(\mathsf{z})=\mathfrak{f}\Big(t,x(t),\mathfrak{I}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}_{0+}x(t)\Big)(\mathsf{z})$. Pour $x_1,x_2\in\mathcal{X}$ et $t\in(0,1]$, on a

$$\|\mathbf{g}(x_1)(\mathsf{z})-\mathbf{g}(x_2)(\mathsf{z})\|\leq\frac{1}{15}\|x_1(t,\mathsf{z})-x_2(t,\mathsf{z})\|,$$

$$\left\|\mathcal{K}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(x_1(t))(\mathsf{z})-\mathcal{K}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(x_2(t))(\mathsf{z})\right\|\leq\frac{1}{4+t}\bigg(\|x_1(t)(\mathsf{z})-x_2(t)(\mathsf{z})\|+\left\|\mathfrak{I}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}_{0+}x_1(t)(\mathsf{z})-\mathfrak{I}^{\frac{1}{3},e^{\frac{t}{2}}}_{0+}x_2(t)(z)\right\|\bigg),$$

$$\left\|\mathcal{K}^{\frac{3}{5}}_{e^{\frac{t}{2}}}(x(t))(\mathsf{z})\right\|\leq e^{-t}+\frac{1}{4+t}(\frac{\pi}{2}+1)$$

Cela signifie que les hypothèses $(\mathbb{H}2)$ et $(\mathbb{H}3)$ sont satisfaites.

Il est facile de voir que $\mathcal{E}^{-1}$ est compact, borné avec $\|\mathcal{E}^{-1}\|\leq 1$ et $(\mathcal{V}+\Delta\mathcal{V})\mathcal{E}^{-1}$ engendre le semi-groupe fortement continu $\breve{\mathbb{S}}(t)$ sur $\mathcal{X}$ avec $\|\breve{\mathbb{S}}(t)\|\leq e^{-t}\leq 1$. Par conséquent, avec les choix ci-dessus, le système (2.20) - (2.22) peut être formulé de manière abstraite comme (2.1), et donc du **théorème 2.3.1** peut être appliqué pour garantir l'existence d'une solution douce de (2.20) - (2.22).

De plus, on peut facilement voir que le système de contrôl rétrograde linéaire υ-Hilfer fractionnaire de type Sobolev correspondant à (2.20) - (2.22) est approximativement contrôlable sur $\mathcal{J}$ (voir [65], Remarque 10), ce qui signifie que toutes les conditions du **théorème 2.3.2** sont satisfaites. Ainsi, l'équation aux dérivées partielles υ-Hilfer fractionnaire de contrôle de type Sobolev (2.20) - (2.22) est approximativement contrôlable sur $\mathcal{J}$.

Chapitre 3

contrôlabilité nulle des équations intégro-différentielles implicites fractionnaires de υ-Hilfer avec des conditions non locales fractionnaires de υ-Hilfer

Contents

3.1 Introduction

En 2022, Chalishajar et al. [14], ont dérivé une nouvelle condition suffisante de contrôlabilité nulle exacte pour les équations différentielles stochastiques fractionnaires de Hilfer, avec mouvement brownien fractionnaire (fBm) et des conditions non locales.

Dans ce chapitre, nous établissons la contrôlabilité nulle exacte des équations intégro-différentielles fractionnaires implicites de υ-Hilfer, avec des conditions non locales fractionnaires de υ-Hilfer. Les principales contributions sont énumérées comme suit,

1. Nous présentons une nouvelle classe de systèmes de contrôle, basée sur un opérateur global et général appelé dérivée fractionnaire de υ-Hilfer, qui englobe une large classe de cas particuliers.

2. Nous établissons un ensemble de conditions suffisantes pour la contrôlabilité nulle exacte de notre problème (3.1) dans l'espace de Hilbert, à l'aide du calcul fractionnaire υ-Hilfer et des solutions d'opérateurs caractéristiques $\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$.
3. Nous présentons un exemple, qui illustre la validité et l'applicabilité des principaux résultats discutés dans ce chapitre.

3.2 Position de probléme

Dans cette section, nous étudions la contrôlabilité nulle exacte des équations intégro-différentielles fractionnaires implicites de υ-Hilfer, avec des conditions non locales fractionnaires de la forme,

$$\begin{cases} {}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}x(t) & = & \mathbb{E}x(t) + \mathfrak{B}u(t) + \Phi\left(t, x(t), {}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}x(t), \mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_2,\upsilon}x(t)\right), \quad t \in (0,\mathsf{T}] \\ \mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\beta_1)(1-\beta_2),\upsilon}x(0) + \mathfrak{q}(x) & = & x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}$ est la dérivée fractionnaire de υ-Hilfer d'ordre $\frac{1}{2} < \beta_1 \leq 1$, type $0 \leq \beta_2 \leq 1$, $x(.)$ prend des valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{X}$. Soit $\mathcal{I} = [0;\mathsf{T}]$, $(-\mathbb{E})$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{\mathcal{G}(t)\}_{t\geq 0}$ on $\mathcal{X}$. La fonction de contrôle $u(.)$ est définie dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathfrak{U})$, l'espace de Hilbert des fonctions de contrôle admissibles pour un espace de Hilbert $\mathfrak{U}$, et $\mathfrak{B}$ est un opérateur linéaire borné de $\mathfrak{U}$ vers $\mathcal{X}$. De plus, $\Phi : \mathcal{I}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $\mathfrak{q} : \mathsf{C}(\mathcal{I};\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ sont des fonctions.

Définissons l'espace de poids[67] des fonctions continues x comme

$$\mathsf{Y} = C_{1-\xi,\upsilon}(\mathcal{I},\mathcal{X}) = \left\{x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}, \quad (\upsilon(t)-\upsilon(0))^{1-\xi}x(t) \in C(\mathcal{I},\mathcal{X})\right\}, \quad 0 \leq \xi < 1,$$

l'espace Y est un espace de Banach avec la norme

$$\|x\|_{\mathsf{Y}} = \max_{t\in\mathcal{I}}\left|(\upsilon(t)-\upsilon(0))^{1-\xi}x(t)\right|.$$

Remarque 3.2.1.

Pour simplifier la notation et la démonstration de certains résultats, nous allons introduire la notation suivante $\Phi\left(t, x(t), {}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}x(t), \mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_2,\upsilon}x(t)\right) = \varphi_x(t)$, $\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s) = \upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{\beta_1-1}$ *et* $\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi} = (\upsilon(t)-\upsilon(0))^{1-\xi}$, *telle que* $\xi = \beta_1 + \beta_2(1-\beta_1)$.

Dans ce chapitre, l'expression $\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1,\upsilon}\varphi_x(t)(d)$ signifie que

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1,\upsilon}\varphi_x(t)(d) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^d \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\varphi_x(s)ds.$$

D'après les **définitions 1.4.3**, **définitions 1.4.11**, **théorème 1.4.5** et la **Remarque 3.2.1**, le problème fractionnaire implicite υ-Hilfer (3.1) pourrait être écrit comme l'équation intégrale fractionnaire suivante:

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta_1)} \int_0^t \mathbb{A}^{\upsilon}_{\beta_1}(t,s)[\varphi_x(s) + \mathfrak{B}u(s)]ds, \tag{3.2}$$

à condition que l'intégrale dans l'équation (3.2) existe.

Lemme 3.2.1.

Soit $0 < \beta_1 < 1$ *et* $0 \leq \beta_2 \leq 1$, *alors*

$$(i) \quad {}^{H}\mathfrak{D}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}_{0^+}\Big[\mathbb{G}^{\beta_1,\beta_2}_{\upsilon}(t,0)\chi\Big] = \mathbb{E}\mathbb{G}^{\beta_1,\beta_2}_{\upsilon}(t,0)\chi,$$

$$(ii) \quad {}^{H}\mathfrak{D}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}_{0^+}\Big[\int_0^t \mathbb{A}^{\upsilon}_{\beta_1}(t,s)\mathbb{K}^{\beta_1}_{\upsilon}(t,s)\Phi(s)\Big] = \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{A}^{\upsilon}_{\beta_1}(t,s)\mathbb{K}^{\beta_1}_{\upsilon}(t,s)\Phi(s)ds + \Phi(t),$$

où les opérateurs $\{\mathbb{G}^{\beta_1,\beta_2}_{\upsilon}(t); t \geq 0\}$ et $\{\mathbb{K}^{\beta_1}_{\upsilon}(t); t \geq 0\}$, sont appelés solutions caractéristiques données par,

$$\mathbb{N}^{\beta_1}_{\upsilon}(t,s)x = \int_0^{+\infty} h_{\beta_1}(\Theta)\mathcal{G}[\mathcal{Q}^{\beta_1}_{\upsilon}(t,s)\Theta]xd\Theta, \quad pour \quad x \in \mathcal{X}, \tag{3.3}$$

$$\mathbb{G}^{\beta_1,\beta_2}_{\upsilon}(t,s)x = \mathfrak{I}^{(1-\beta_1)(\beta_2-1);\upsilon}_{0^+}\mathbb{N}^{\beta_1}_{\upsilon}(t,s)x, \tag{3.4}$$

et

$$\mathbb{K}^{\beta_1}_{\upsilon}(t,s)x = \beta_1 \int_0^{+\infty} \Theta h_{\beta_1}(\Theta)\mathcal{G}[\mathcal{Q}^{\beta_1}_{\upsilon}(t,s)\Theta]xd\Theta, \tag{3.5}$$

pour $0 \leq s \leq t \leq \mathsf{T}$, on a

$$\mathcal{G}(t) := e^{-\mathbb{E}t},$$

de même,

$$h_{\beta_1}(\Theta) = \frac{1}{\beta_1}\Theta^{-1-\frac{1}{\beta_1}}\rho_{\beta_1}\Big(\Theta^{-\frac{1}{\beta_1}}\Big),$$

et

$$\rho_{\beta_1}(\Theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\Theta^{-\beta_1 j-1}\frac{\Gamma(\beta_1 j+1)}{j!}sin(j\pi\beta_1),$$

et enfin

$$\mathcal{L}_{\upsilon}\{\rho_{\beta_1}(t)\}(\gamma) = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))}\rho_{\beta_1}(t)\upsilon'(t)dt = e^{-\gamma^{\beta_1}},$$

où h_{β_1} est la fonction de densité de probabilité.

Démostration 3.2.1.

(i) Il suffit de montrer que ${}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\alpha_1,\alpha_2,\upsilon}\Big[\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\chi\Big] = \mathbb{E}\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\chi$,

pour $t \geq 0$, *en utilisant*(3.3) *et* ***Définition 1.5.2****, on obtient*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\upsilon}\Big\{\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\chi\Big\} &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))}\Big(\int_0^{+\infty} h_{\beta_1}(\Theta)\mathcal{G}[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\Theta]\chi d\Theta\Big)\upsilon'(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))}\Big(\int_0^{+\infty} \rho_{\beta_1}(\Theta)\mathcal{G}[\frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)}{\Theta^{\beta_1}}]\chi d\Theta\Big)\upsilon'(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta\rho_{\beta_1}(\Theta)e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))\Theta}\mathcal{G}[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)]\chi\upsilon'(t)d\Theta dt \\
&= \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))^{\beta_1}}\mathcal{G}[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\alpha_1}(t,0)]\chi dt \\
&= \beta_1\int_0^{+\infty} \gamma^{\beta_1-1}(t,0)\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1-1}(t,0)e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))^{\beta_1}}\mathcal{G}[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)]\chi\upsilon'(t)dt \\
&= \gamma^{\beta_1-1}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^{\beta_1}s}\mathcal{G}(s)\chi ds \quad (s=(\upsilon(t)-\upsilon(0)^{\beta_1}) \\
&= \gamma^{\beta_1-1}(\gamma^{\alpha_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})^{-1}\chi. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

D'autre part, selon le ***Lemme 1.5.1****, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\upsilon}\Big\{{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}\Big[\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\chi\Big]\Big\} &= \gamma^{\beta_1}\mathcal{L}_{\upsilon}\Big\{\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\chi\Big\} - \gamma^{\beta_1-1}\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(0,0)\chi \\
&= \gamma^{\beta_1}\Big[\gamma^{\beta_1-1}(\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})^{-1}\chi\Big] - \gamma^{\beta_1-1}\chi \\
&= \gamma^{\beta_1-1}(\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})^{-1}[\gamma^{\beta_1}-(\gamma^{\beta_1}-\mathbb{E})]\chi \\
&= \mathbb{E}\gamma^{\beta_1-1}(\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})^{-1}\chi. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

En combinant (3.6) *avec* (3.7)*, on obtient*

$${}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}\Big[\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\mathcal{X}\Big] = \mathbb{E}\mathbb{N}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,0)\mathcal{X}.$$

(ii) Pour $t \geq 0$*, en utilisant* (3.5)*, on obtient*

$$\mathcal{L}_{\eta}\Big\{\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\Phi(s)ds\Big\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))}\int_0^t\int_0^{+\infty} \beta_1\Theta h_{\beta_1}(\Theta)\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathcal{G}[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\Theta]\Phi(s)d\Theta ds \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))}\int_0^t\int_0^{+\infty} \beta_1\rho_{\beta_1}(\Theta)\frac{\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)}{\Theta^{\beta_1}}\mathcal{G}[\frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)}{\Theta^{\beta_1}}]\Phi(s)d\Theta ds \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \beta_1\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(s,0)e^{-(\gamma(\upsilon(s)-\upsilon(0)))^{\beta_1}}\mathcal{G}[\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta_1}(s,0)]e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))}\Phi(t)\upsilon'(t)dsdt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma^{\beta_1}u}\mathcal{G}(u)\int_0^{+\infty} e^{-\gamma(\upsilon(t)-\upsilon(0))}\Phi(t)\upsilon'(t)dtdu \\
&= (\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})\mathcal{L}_{\upsilon}\{\Phi(t)\}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Selon le ***Lemme 1.5.1****, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\upsilon}\left\{{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}\left[\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\Phi(s)ds\right]\right\} &= \gamma^{\beta_1}\mathcal{L}_{\upsilon}\left\{\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\Phi(s)ds\right\} - \gamma^{\beta_1-1}.0\\ &= \gamma^{\beta_1}(\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})^{-1}\mathcal{L}_{\upsilon}\{\Phi(t)\}\\ &= [(\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})+\mathbb{E}](\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})^{-1}\mathcal{L}_{\upsilon}\{\Phi(t)\}\\ &= \mathbb{E}(\gamma^{\beta_1}\mathbb{I}-\mathbb{E})^{-1}\mathcal{L}_{\upsilon}\{\Phi(t)\}+\mathcal{L}_{\upsilon}\{\Phi(t)\}. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

En combinant (3.8) avec (3.9), on obtient

$${}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}\left[\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\Phi(s)ds\right] = \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\Phi(s)ds + \Phi(t).$$

La Démostration est complète.

Lemme 3.2.2.

Les opérateurs $\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$ ont les propriétés suivantes :

(i) Pour toute valeur fixée $t \le s \le 0$; les opérateurs $\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$ sont des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{X}$ qui vérifent les conditions suivantes:

$$\|\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)x\| \le \frac{\mathcal{K}_0\mathcal{Q}^{(1-\beta_1)(\beta_2-1)}(\mathsf{T},0)}{\Gamma(\beta_1+\beta_2(1-\beta_1))}\|x\| \le \mathbb{A}_1\|x\|.$$

$$\|\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)x\| \le \frac{\mathcal{K}_0}{\Gamma(\beta_1)}\|x\| \le \mathbb{A}_2\|x\|.$$

où $\mathcal{K}_0 = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|\mathcal{G}(t)\|$.

(ii) Les opérateurs $\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t,0)\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t,0)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$ sont fortement continus pour tout $t \ge s \ge 0$. Cela signifie que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $0 \le s \le t_1 < t_2 \le \mathsf{T}$, nous avons

$$\left\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t_2,0)\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t_2,s) - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t_1,0)\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t_1,s)\right\| \to 0$$

et

$$\left\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t_2,0)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t_2,s) - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t_1,0)\mathbb{K}^{\beta_1}(t_1,s)\right\| \to 0$$

quand $t_2 - t_1 \to 0$.

(iii) Si $\mathcal{G}(t)$ est un opérateur compact pour tout $t > 0$, alors $\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$ sont compacts pour tout $t, s > 0$.

(iv) Si $\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$ sont des semi-groupes compacts fortement continus d'opérateurs linéaires bornés pour $t, s > 0$, alors $\mathbb{G}_{\eta}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$, sont continus dans la topologie des opérateurs uniformes.

Lemme 3.2.3.

Le problème fractionnaire implicite υ-Hilfer (3.1)*, a une solution unique* $x \in \mathsf{Y} = C_{1-\xi}(\mathcal{I}, X)$ *et pour chaque* $0 < t \leq \mathsf{T}$*, cette solution satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathfrak{q}(x)] + \int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\eta}^{\beta_1}(t,s)[\varphi_x(s) + \mathfrak{B}u(s)]ds, \tag{3.10}$$

où, $\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ *et* $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$ *sont définis par* (3.4) *et* (3.5)*, respectivement.*

Démostration 3.2.2.

Pour $t \in \mathcal{I}$*, d'après le* ***Lemme 3.2.1****, on obtenons*

$$\begin{aligned}
{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2;\upsilon}x(t) &= {}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2;\upsilon}\left(\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathfrak{q}(x)] + \int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[\varphi_x(s) + \mathfrak{B}u(s)]ds\right) \\
&= \mathbb{E}\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathfrak{q}(x)] + \mathbb{E}\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[\varphi_x(s) + \mathfrak{B}u(s)]ds + \varphi_x(t) + \mathfrak{B}u(t) \\
&= \mathbb{E}x(t) + \varphi_x(t) + \mathfrak{B}u(t).
\end{aligned}$$

Pour $t = 0$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
x(0) = \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(0,0)[x_0 - \mathfrak{q}(x)] &= \mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\beta_1)(\beta_2-1);\upsilon}\int_0^{+\infty} h_{\beta_1}(\Theta)(0)d\Theta[x_0 - \mathfrak{q}(0)] \\
&= \frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{(1-\beta_1)(\beta_2-1)}(t,0)}{\Gamma(\beta_2(1-\beta_1)+\beta_1)}[x_0 - \mathfrak{q}(x)].
\end{aligned}$$

Ainsi, l'expression (3.10) *est une solution du problème* (3.1)*.*

3.3 Contrôlabilité nulle exacte

Dans cette section, nous formulons des conditions suffisantes pour une contrôlabilité nulle exacte pour le système (3.1).

Pour étudier la contrôlabilité nulle exacte de (3.1), nous considérons le système linéaire fractionnaire υ-Hilfer suivant:

$$\begin{cases}
{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}x(t) &= \mathbb{E}x(t) + \mathfrak{B}u(t) + \Phi(t)\ , \quad t \in \mathcal{I} \\
\mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\beta_1)(1-\beta_2),\upsilon}x(0) &= x_0,
\end{cases} \tag{3.11}$$

associé au système (3.1), où $\Phi \in \mathbf{L}^2(\mathcal{I};\mathcal{X})$.

Introduisons les opérateurs $\mathbb{L}_0^{\mathsf{T}} : \mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathfrak{U}) \to \mathcal{X}$ et $\mathcal{N}_0^{\mathsf{T}} : \mathcal{X} \times \mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathfrak{U}) \to \mathcal{X}$, respectivement,

$$\mathbb{L}_0^{\mathsf{T}} u = \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\mathfrak{B}u(s)ds, \quad pour \quad u \in \mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathfrak{U}),$$

et

$$\mathcal{N}_0^{\mathsf{T}}(x_0,\Phi) = \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(\mathsf{T},0)x_0 + \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\Phi(s)ds, \quad (x_0,\Phi) \in \mathcal{X} \times \mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathcal{X}).$$

Définition 3.3.1.

Le système (3.11) est dit exactement nul contrôlable sur $\mathcal{I}$ si

$$Im\mathbb{L}_0^{\mathsf{T}} \supset Im\mathcal{N}_0^{\mathsf{T}}$$

D'après [15], le système (3.11) est exactement nul contrôlable s'il existe $k > 0$ tel que

$$\|(\mathbb{L}_0^{\mathsf{T}})^* x\|^2 \geq k\|(\mathcal{N}_0^{\mathsf{T}})^* x\|^2, \quad pour\ tout \quad x \in \mathcal{X}.$$

Lemme 3.3.1. *[16]*

Supposons que le système linéaire fractionnaire υ-Hilfer (3.11) soit exactement nul contrôlable sur $\mathcal{I}$, alors l'opérateur linéaire $\mathcal{W} = (\mathbb{L}_0)^{-1}\mathcal{N}_0^{\mathsf{T}} : \mathcal{X} \times \mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathcal{X}) \to \mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathfrak{U})$ est borné et le contrôle

$$\begin{aligned} u(t) &:= -(\mathbb{L}_0)^{-1}(\mathcal{N}_0^{\mathsf{T}}(x,\Phi))(t) = -\mathcal{W}(x_0,\Phi)(t) \\ &= -(\mathbb{L}_0)^{-1}\Big[\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(\mathsf{T},0)x_0 + \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\Phi(s)ds\Big](t), \end{aligned}$$

transfère le système (3.11) de x_0 à 0, où $\mathbb{L}_0$ est la restriction de $\mathbb{L}_0^{\mathsf{T}}$ à $[Ker\mathbb{L}_0^{\mathsf{T}}]^{\perp}$.

Démostration 3.3.1.

La preuve de ce résultat est similaire à celle du ***Lemme 3*** *dans [16].*

Maintenant, nous donnons les définitions de la solution douce et de sa contrôlabilité nulle exacte.

Définition 3.3.2.

Pour chaque contrôle $u(.) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{I},\mathfrak{U})$ et $\mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\beta_1)(1-\beta_2),\upsilon}x(0) + \mathfrak{q}(x) = x_0$, $t \in \mathcal{I}$, une solution $x \in \mathsf{Y} = C_{1-\xi;\upsilon}(\mathcal{I},\mathcal{X})$, est appelée une solution douce de (3.1) si (3.10) est vérifiée.

Définition 3.3.3.

Le système (3.1) est dit exactement nul contrôlable sur l'intervalle $\mathcal{I}$ s'il existe un contrôle $u \in \mathbf{L}^2(\mathcal{I};\mathfrak{U})$ tel que la solution x du système (3.1) satisfait $x(\mathsf{T}) = 0$.

Pour prouver le résultat principal, nous avons besoin des hypothèses suivantes:

($\mathbb{H}$1) Le système linéaire fractionnaire υ-Hilfer (3.11), est exactement nul contrôlable sur $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{X}$.

($\mathbb{H}$2) a) Il existe des constantes $\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_3 > 0$, et $0 < \mathsf{L}_2 < 1$ telles que,

$$\|\Phi(t, x_1, y_1, z_1) - \Phi(t, x_2, y_2, z_2)\| \leq \mathsf{L}_1\|x_1 - x_2\| + \mathsf{L}_2\|y_1 - y_2\| + \mathsf{L}_3\|z_1 - z_2\|$$

pour tout $x_i, y_i, z_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, 2$ et $t \in \mathcal{I}$, avec $\sup_{t\in\mathcal{I}}\|\Phi(t; 0; 0; 0)\| = \mathbb{M}_1 < \infty$

b) La fonction $\Phi : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est continue et pour tout $\tau > 0$, il existe une fonction $\phi_\tau(t) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{I}, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\sup_{(x,y,z)\in\mathsf{B}_\tau^3} \|\Phi(x, y, z)\| \leq \phi_\tau(t), \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathcal{I};$$

et il existe un $\varrho_1 > 0$ tel que,

$$\liminf_{\tau\to\infty} \frac{\|\phi_\tau(t)\|_{\mathbf{L}^2}}{\tau} = \varrho_1 < \infty,$$

où on note $\mathsf{B}_\tau := \{x \in \mathsf{Y} : \|x\|_{\mathsf{Y}} \leq \tau\}$.

De toute évidence, B_τ est un sous-ensemble borné, fermé et convexe dans Y.

($\mathbb{H}$3) La fonction $\mathsf{q} : \mathsf{C}(\mathcal{I}; \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ est continue et satisfait

$$\|\mathsf{q}(x)\| \leq \mathsf{L}\|x\|,$$

pour une constante $\mathsf{L} > 0$ et tout $x \in \mathsf{C}(\mathcal{I}, \mathcal{X})$, et il existe un $\sigma = \sigma(\tau) \in (0, \mathsf{T})$ tel que $\mathsf{q}(x_1) = \mathsf{q}(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in \mathsf{B}_\tau$ avec $x_1(t) = x_2(t), \quad t \in [\sigma, \mathsf{T}]$.

Pour faciliter les calculs, nous utilisons les notations suivantes:

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathcal{Q}_\upsilon^{\xi+\alpha_1-1}(\alpha_2, 0)}{\Gamma(\xi + \alpha_1)}$$

$$\Lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \Gamma(\xi)\left[\frac{\mathsf{L}_1 + \mathsf{L}_2\|\mathbb{E}\|}{1 - \mathsf{L}_2}\Psi(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\mathsf{L}_3}{1 - \mathsf{L}_2}\Psi(\alpha_1 + \beta_2, \xi)\right]$$

$$w = \frac{\mathsf{L}_2}{1 - \mathsf{L}_2}\widehat{w}, \quad \widehat{w} = \Gamma(\xi)\|\mathfrak{B}\|\Psi(\beta_1, \mathsf{T}),$$

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{Q}_\upsilon^{\beta_1}(\mathsf{T}, 0)\mathbb{M}_1}{\Gamma(\beta_1 + 1)}, \quad \mathsf{h}(\mathsf{T}) = \upsilon'(\mathsf{T})\frac{\mathcal{Q}_\upsilon^{2\beta_1-1}(\mathsf{T}, 0)}{2\beta_1 - 1}, \quad \|\mathcal{W}\| = l.$$

Considérons

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1;\upsilon}\|x(t)\| = \mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1;\upsilon}\left\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\xi-1}(t,0)\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t,0)x(t)\right\|$$

$$\leq \frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi+\beta_1)}\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\xi+\beta_1-1}(t,0)\|\|x\|_{\mathsf{Y}}.$$

Maintenent, nous calculons l'intégrale $\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1;\upsilon}\|\varphi_x(t)\|$

En vu de $(\mathbb{H}2)$, on obtient

- $$\|\varphi_x(t)\| \leq \left\|\Phi\left(t,x(t),{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}x(t),\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_2,\upsilon}x(t)\right)-\Phi(t,0,0,0)\right\|+\left\|\Phi(t,0,0,0)\right\|$$

$$\leq \mathsf{L}_1\left\|x(t)\right\|+\mathsf{L}_2\left\|{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}x(t)\right\|+\mathsf{L}_3\left\|\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_2,\upsilon}x(t)\right\|+\mathbb{M}_1.$$

D'autre part, nous avons

- $$\left\|{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\beta_1,\beta_2,\upsilon}x(t)\right\| \leq \|\mathbb{E}\|\|x(t)\|+\|\mathfrak{B}\|\|u(t)\|+\|\Phi_x(t)\|$$

$$\leq \|\mathbb{E}\|\|x(t)\|+\|\mathfrak{B}\|\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\Phi_x)(t)\|+\|\Phi_x(t)\|.$$

Alors,

- $$\|\varphi_x(t)\| \leq \mathsf{L}_1\left\|x(t)\right\|+\mathsf{L}_2\Big(\|\mathbb{E}\|\|x(t)\|+\|\mathfrak{B}\|\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\Phi_x)(t)\|+\|\Phi_x(t)\|\Big)$$

$$+\mathsf{L}_3\left\|\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_2,\upsilon}x(t)\right\|+\mathbb{M}_1$$

$$\leq \frac{1}{1-\mathsf{L}_2}\Big[(\mathsf{L}_1+\mathsf{L}_2\|\mathbb{E}\|)\|x(t)\|+\mathsf{L}_2\|\mathfrak{B}\|\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\Phi_x)(t)\|+\mathsf{L}_3\|\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_2,\upsilon}x(t)\|+\mathbb{M}_1\Big]$$

$$\leq \frac{\mathsf{L}_1+\mathsf{L}_2\|\mathbb{E}\|}{1-\mathsf{L}_2}\left\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\xi-1}(t,0)\right\|\left\|x(t)\right\|_{\mathsf{Y}}+\frac{\mathsf{L}_2}{1-\mathsf{L}_2}\|\mathfrak{B}\|\left\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\xi-1}(t,0)\right\|\left\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\Phi_x)(t)\right\|_{\mathsf{Y}}$$

$$+\frac{\mathsf{L}_3\Gamma(\xi)}{(1-\mathsf{L}_2)\Gamma(\xi+\beta_2)}\left\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\xi+\beta_2-1}(t,0)\right\|\left\|x(t)\right\|_{\mathsf{Y}}+\frac{\mathbb{M}_1}{1-\mathsf{L}_2}.$$

Ainsi, on obtient

- $$\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1,\upsilon}\left\|\varphi_x(t)\right\| \leq \Lambda(\beta_1,\mathsf{T})\|x(t)\|_{\mathsf{Y}}+w\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\Phi_x)(t)\|_{\mathsf{Y}}+\mathcal{K}.$$

Théorème 3.3.1.

Si les hypothèses $(\mathbb{H}1)$-$(\mathbb{H}3)$ *sont satisfaites, alors le système* (3.1) *est exactement nul contrôlable sur* $\mathcal{I}$ *à condition que*

$$\mathbb{A}_1\mathsf{L} + \mathbb{A}_2\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\left[\Lambda(\beta_1,\mathsf{T}) + \frac{wl}{\mathsf{L}_2}\left(\mathsf{L} + \varrho_1\sqrt{\mathsf{h}(\mathsf{T})}\right)\right] < 1. \tag{3.12}$$

Pour un $x(.)$ arbitraire, définissez l'opérateur $\mathcal{S}$ sur Y comme suit

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}x)(t) &= \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathsf{q}(x)] \\ &+ \int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[\Phi_x(s) - \mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x),\varphi_x)]ds,\end{aligned} \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned}u(t) &= -\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x),\varphi_x) \\ &= -(\mathbb{L}_0)^{-1}\left[\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(\mathsf{T},0)[x_0 - \mathsf{q}(x)] + \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\varphi_x(s)ds\right](t).\end{aligned}$$

Alors, il est facile de voir que $u(t)$ est bien défini, car $x_0 - \mathsf{q}(x) \in \mathcal{X}$, $\mathcal{S}_x(s) \in \mathbf{L}^2(\mathcal{I};\mathcal{X})$.

De plus, ce contrôle oriente x_0 vers 0. En fait, si $x(t)$ est une solution douce à (3.1), alors,

$$\begin{aligned}x(\mathsf{T}) &= \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(\mathsf{T},0)[x_0 - \mathsf{q}(x)] + \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)[\varphi_x(s) + \mathfrak{B}u(s)]ds \\ &= \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(\mathsf{T},0)[x_0 - \mathsf{q}(x)] - \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\mathfrak{B}(\mathbb{L}_0)^{-1} \\ &\times \left[\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(\mathsf{T},0)[x_0 - \mathsf{q}(x)] + \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\varphi_x(s)ds\right](s)ds \\ &+ \int_0^{\mathsf{T}} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\varphi_x(s)ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

On montrera que l'opérateur $\mathcal{S}$ de Y en lui-même a un point fixe. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1.

Le contrôle $u(.) = -\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x),\varphi_x)$ est borné sur B_τ. En effet,

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\mathsf{Y}} &= \|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t,0)\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(s)\| \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Big(\int_0^{\mathsf{T}}\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(s)\|^2 ds\Big)^{1/2} \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|\mathcal{W}\|\Bigg[\|x_0-\mathsf{q}(x)\|+\Big(\int_0^{\mathsf{T}}\|\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s)\varphi_x(s)\|^2 ds\Big)^{1/2}\Bigg] \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|\mathcal{W}\|\Bigg[\|x_0-\mathsf{q}(x)\|+\Big(\int_0^{\mathsf{T}}(\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(\mathsf{T},s))^2 ds\Big)^{1/2}\|\varphi_x(s)\|_{L^2}\Bigg] \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|\mathcal{W}\|\Bigg[\|x_0\|+\|\mathsf{q}(x)\|+\sqrt{\upsilon'(\mathsf{T})\frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{2\beta_1-1}(\mathsf{T},0)}{2\beta_1-1}}\|\varphi_x(s)\|_{L^2}\Bigg] \\
&\leq \|\mathcal{W}\|\Bigg[\|x_0\|_{\mathsf{Y}}+\mathsf{L}\tau+\sqrt{\upsilon'(\mathsf{T})\frac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{2\beta_1-1}(\mathsf{T},0)}{2\beta_1-1}}\|\phi_\tau(t)\|_{L^2}\Bigg]. \\
&\leq l\Bigg[\|x_0\|_{\mathsf{Y}}+\mathsf{L}\tau+\sqrt{\mathsf{h}(\mathsf{T})}\|\phi_\tau(t)\|_{L^2}\Bigg]. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Étape 2.

On montre qu'il existe un nombre $\tau > 0$, tel que $\mathcal{S}\mathsf{B}_\tau \subset \mathsf{B}_\tau$. Sinon, alors pour tout $\tau > 0$, $x(.) \in \mathsf{B}_\tau$, il existe un certain $t(\tau) \in \mathcal{I}$, tel que $\|\mathcal{S}x(t)\|_{\mathsf{Y}} > \tau$.

A partir de (3.13)-(3.14), du **lemme 3.2.2** et des hypothèses ($\mathbb{H}2$)–($\mathbb{H}3$), on a

$$
\begin{aligned}
\tau &< \|\mathcal{S}x(t)\|_{\mathsf{Y}} = \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|\mathcal{S}x(t)\| \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Bigg[\Big\|\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0-\mathsf{q}(x)]\Big\|+\Big\|\int_0^{\mathsf{T}}\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\varphi_x(s)\Big\| \\
&+\Big\|\int_0^{\mathsf{T}}\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(\mathsf{T},s)\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(s)\Big\|\Bigg] \\
&:= \mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2+\mathfrak{I}_3.
\end{aligned}
$$

Où,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 &\leq \mathbb{A}_1\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)[\|x_0\|+\|\mathsf{q}(x)\|] \\
&\leq \mathbb{A}_1[\|x_0\|_{\mathsf{Y}}+\|\mathsf{q}(x)\|_{\mathsf{Y}}] \\
&\leq \mathbb{A}_1(\|x_0\|_{\mathsf{Y}}+\mathsf{L}\|x(t)\|_{\mathsf{Y}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_2 &\leq \mathbb{A}_2\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1,\upsilon}\Big\|\varphi_x(s)\Big\| \\
&\leq \mathbb{A}_2\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\Big\{\Lambda(\beta_1,\mathsf{T})\|x(t)\|_{\mathsf{Y}}+\omega\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\Phi_x)(t)\|_{\mathsf{Y}}+\mathcal{K}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_3 &\leq \mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\|\mathfrak{B}\|\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1,\upsilon}\Big\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(t)\Big\| \\
&\leq \mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\|\mathfrak{B}\|\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma(\xi+\beta_1)}\Big\|(\upsilon(t)-\upsilon(0))^{\xi+\beta_1-1}\Big\| \\
&\times\Big\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(t)\Big\|_{\mathsf{Y}} \\
&\leq \mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\widehat{w}\Big\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\Phi_x)(t)\Big\|_{\mathsf{Y}} \\
&\leq \mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\left(\frac{1-\mathsf{L}_2}{\mathsf{L}_2}\right)w\Big\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(t)\Big\|_{\mathcal{Y}},
\end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2 \leq \mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\eta}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\Big[\Lambda(\beta_1,\mathsf{T})\|x(\mathsf{T})\|_{\mathsf{Y}}+\frac{w}{\mathsf{L}_2}\Big\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(t)\Big\|_{\mathsf{Y}}+\mathcal{K}\Big].$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\tau < \|\mathcal{S}x(t)\|_{\mathsf{Y}} &\leq \mathbb{A}_1(\|x_0\|_{\mathsf{Y}}+\mathsf{L}\tau)+\mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\eta}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\Lambda(\beta_1,\mathsf{T})\tau \\
&+\mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\frac{wl}{L_2}\Big[\|x_0\|_{\mathsf{Y}}+\mathsf{L}\tau+\sqrt{\mathsf{h}(\mathsf{T})}\|\phi_\tau(t)\|_{L^2}\Big] \\
&+\mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\mathcal{K}.
\end{aligned}$$

En divisant de part et d'autre par τ et en prenant la limite inférieure $\tau \to +\infty$, on obtient

$$1 < \mathbb{A}_1\mathsf{L}+\mathbb{A}_2 \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\Big[\Lambda(\beta_1,\mathsf{T})+\frac{wl}{L^2}\Big(\mathsf{L}+\varrho_1\sqrt{\mathsf{h}(\mathsf{T})}\Big)\Big],$$

ce qui contredit (3.12). Il existe donc un nombre positif $\tau > 0$, tel que $\mathcal{S}\mathcal{B}_\tau \subset \mathsf{B}_\tau$.

Étape 3.

Nous prouvons que la famille de fonctions $\Big\{(\mathcal{S}x)(.) : x \in \mathsf{B}_\tau\Big\} \subseteq \mathsf{Y}$ est équicontinue sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Soit $0 \leq t_1 < t_2 \leq \mathsf{T}$ et $x \in \mathsf{B}_\tau$, alors,

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{S}x)(t_2)-(\mathcal{S}x)(t_1)\|_{\mathsf{Y}} &= \|\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_2,0)(\mathcal{S}x)(t_2)-\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_1,0)(\mathcal{S}x)(t_1)\| \\
&\leq \left\|(\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_2,0)\mathbb{G}_v^{\beta_1,\beta_2}(t_2,0)-\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_1,0)\mathbb{G}_v^{\beta_1,\beta_2}(t_1,0))[x_0-\mathsf{q}(x)]\right\| \\
&+ \left\|\int_0^{t_1}\mathbb{A}_{\beta_1}^v(t_2,s)\Big(\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_2,0)\mathbb{K}_v^{\beta_1}(t_2,s)-\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_1,0)\mathbb{K}_v^{\beta_1}(t_1,s)\Big)\right. \\
&\left.\times[-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi)(s)+\varphi_x(s)]ds\right\| \\
&+ \left\|\int_{t_1}^{t_2}\mathbb{A}_{\beta_1}^v(t_2,s)\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_2,0)\mathbb{K}_v^{\beta_1}(t_2,s)[-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi)(s)+\varphi_x(s)]ds\right\| \\
&\leq \left\|(\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_2,0)\mathcal{S}_v^{\beta_1,\beta_2}(t_2,0)-\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_1,0)\mathbb{G}_v^{\beta_1,\beta_2}(t_1,0))[x_0-\mathsf{q}(x)]\right\| \\
&+ \int_0^{t_1}\mathbb{A}_{\beta_1}^v(t_2,s)\left\|\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_2,0)\mathbb{K}_v^{\beta_1}(t_2,s)-\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_1,0)\mathbb{K}_v^{\beta_1}(t_1,s)\right\| \\
&\times\|-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(s)+\varphi_x(s)\|ds \\
&+ \int_0^{t_1}\mathbb{A}_{\beta_1}^v(t_2,s)\left\|\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t_2,0)\mathbb{K}_v^{\beta_1}(t_2,s)[-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(s)+\varphi_x(s)]\right\|ds \\
&:= \mathfrak{I}_4+\mathfrak{I}_5+\mathfrak{I}_6.
\end{aligned}
$$

On remarque que, $\mathfrak{I}_4\to 0$ et $\mathfrak{I}_5\to 0$ quand $t_2-t_1\to 0$ parce que les opérateurs $\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t,0)\mathbb{G}_v^{\beta_1,\beta_2}(t,0)$ et $\mathcal{Q}_v^{1-\xi}(t,0)\mathbb{K}_v^{\beta_1}(t,s)$ sont uniformément continus sur $\mathcal{I}$.

Pour $\mathfrak{I}_6$, on a

$$
\mathfrak{I}_6\leq \mathcal{Q}_v^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\mathbb{A}_2\left[\frac{\mathcal{Q}_v^{2\beta_1-1}(t_2,t_1)}{\Gamma(2\beta_1-1)}\|\mathfrak{B}\|\|\mathcal{W}(x_0-\mathsf{q}(x),\varphi_x)(s)\|\right.
$$

$$
\left.+\int_{t_1}^{t_2}\mathbb{A}_{\beta_1}^v(t_2,s)\|\varphi_x(s)\|ds\right],
$$

Donc,

$$
\mathfrak{I}_6\leq \mathcal{Q}_v^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\mathbb{A}_2\left[\frac{\mathcal{Q}_v^{2\beta_1-1}(t_2,t_1)}{\Gamma(2\beta_1-1)}\|\mathfrak{B}\|.\mathit{l}[\|x_0\|_{\mathsf{Y}}+\mathsf{L}\tau+\sqrt{\mathsf{h}(\mathsf{T})}\|\phi_\tau(t)\|_{L^2}]\right.
$$

$$
\left.+\left(\int_{t_1}^{t_2}\phi_\tau^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}(\mathbb{A}_{\beta_1}^v(t_2,s))^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],
$$

Cela montre que $\mathfrak{I}_6\to 0$ lorsque $t_2-t_1\to 0$ indépendamment de x. Ainsi, $\{(\mathcal{S}x)(.):x\in\mathsf{B}_\tau\}$ est équicontinue sur $\mathcal{I}$.

Étape 4.

Nous prouvons que pour $t \in \mathcal{I}$ quelconque, l'ensemble $\{\mathcal{S}(x)(t) : x \in \mathsf{B}_\tau\}$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$.

Si $t = 0$, alors, $\mathcal{S}(x)(0) = \mathbb{G}_{\tau}^{\beta_1,\beta_2}(0,0)[x_0 - \mathsf{q}(x)] = \dfrac{\mathcal{Q}_{\upsilon}^{(1-\beta_1)(\beta_2-1)}(t,0)}{\Gamma(\beta_2(1-\beta_1)+\beta_1)}[x_0 - \mathsf{q}(x)]$, et $\mathsf{q}(x)$ est borné dans $\mathcal{X}$, il est donc vrai pour $t = 0$. Soit t fixé, $0 < t \leq \mathsf{T}$, et soit ϵ vérifiant $0 < \epsilon < t$.

Pour chaque $x \in \mathsf{B}_\tau$, nous définissons

$$\mathcal{S}_\epsilon(x)(t) = \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathsf{q}(x)]$$

$$+ \int_0^{t-\epsilon} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x)), \varphi_x)(s) + \varphi_x(s)]ds, \quad t \in (0,\mathsf{T}].$$

Comme $\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et $\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)$ sont compacts, l'ensemble $\Big\{\mathcal{S}_\epsilon(x)(t) : x \in \mathsf{B}_\tau\Big\}$ est relativement compact en $\mathcal{X}$ pour tout ϵ, $0 < \epsilon < t$. De plus, pour chaque $x \in \mathsf{B}_\tau$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}(x)(t) - \mathcal{S}_\epsilon(x)(t)\|_{\mathsf{Y}} &\leq \Big\|\mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t,0)\mathcal{S}(x)(t) - \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(t,0)\mathcal{S}_\epsilon(x)(t)\Big\| \\
&\leq \mathcal{Q}_{\eta}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Big\|\int_0^{\epsilon} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x)), \varphi_x)(s) + \varphi_x(s)]ds\Big\| \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Big\|\int_0^{\epsilon} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x)), \varphi_x)(s)ds\Big\| \\
&+ \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Big\|\int_0^{\epsilon} \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)\varphi_x(s)ds\Big\| \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\mathbb{A}_2\Big(\int_0^{\epsilon} (\mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s))^2\|\mathfrak{B}\|^2 ds\Big)^{1/2} \\
&\times \Big(\int_0^{\mathsf{T}} \|\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x), \varphi_x), \varphi_x)(s)\|^2 ds\Big)^{1/2} \\
&+ \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\mathbb{A}_2\sqrt{\mathsf{h}(\epsilon)}\|\varphi_x(s)\|_{L^2} \\
&\leq \mathbb{A}_2\|\mathfrak{B}\|\sqrt{\mathsf{h}(\epsilon)}l\Big[\|x_0\|_{\mathsf{Y}} + \mathsf{L}\tau + \sqrt{\mathsf{h}(\mathsf{T})}\|\phi_\tau\|_{\mathbf{L}^2}\Big] \\
&+ \mathbb{A}_2\sqrt{\mathsf{h}(\epsilon)}\|\phi_\tau\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Alors, pour $\epsilon \to 0^+$ et $\mathsf{h}(\epsilon) = \upsilon'(\epsilon)\dfrac{\mathcal{Q}^{2\beta_1-1}(\epsilon,0)}{2\beta_1-1} \to 0^+$, on voit qu'il existe des ensembles relativement compacts arbitrairement proches de l'ensemble $\Big\{\mathcal{S}_\epsilon(x)(t) : x \in \mathsf{B}_r\Big\}$. Ainsi, pour chaque $t \in \mathcal{I}$, l'opérateur $\mathsf{S}x(t)$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$.

Étape 5.

On montre que l'opérateur $\mathcal{S} : \mathsf{Y} \to \mathsf{Y}$ est continu sur B_τ.

Soit $x_n \to x \in \mathsf{B}_r$, alors,

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{S}x_n)(t) - (\mathcal{S}x)(t)\|_{\mathsf{Y}} &\leq \|\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(t,0)((\mathcal{S}x_n)(t) - (\mathcal{S}x)(t))\| \\
&\leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Big\|\mathbb{G}_\upsilon^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[\mathsf{q}(x_n) - \mathsf{q}(x)]\Big\| \\
&+ \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Big\|\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^\upsilon(t,s)\mathbb{K}_\upsilon^{\beta_1}(t,s) \\
&\times \Big[\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x_n)), \varphi_{x_n})(s) - \mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x)), \varphi_x)(s)\Big]ds\Big\| \\
&+ \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Big\|\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^\upsilon(t,s)\mathbb{K}_\varphi^{\beta_1}(t,s)[\varphi_{x_n}(s) - \varphi_x(s)]ds\Big\| \\
&\leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\mathbb{A}_1\|\mathsf{q}(x_n) - \mathsf{q}(x)\| \\
&+ \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\mathbb{A}_2\|\mathfrak{B}\|\Gamma(\beta_1)\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1,\upsilon} \\
&\times \Big[\Big\|\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x_n)), \varphi_{x_n})(s) - \mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x)), \varphi_x)(s)\Big\|\Big] \\
&+ \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\mathbb{A}_2\Gamma(\beta_1)\mathfrak{I}_{0^+}^{\beta_1,\upsilon}\|\varphi_{x_n}(s) - \varphi_x(s)\| \\
&\to 0 \quad as \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Comme q, $\mathcal{W}$ sont des fonctions continues dans $\mathsf{C}(\mathcal{I},\mathcal{X})$ et $\varphi_x(t) = \Phi(t,.,.,.) : \mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est aussi continue, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il s'ensuit immédiatement que

$$\|(\mathcal{S}x_n)(t) - (\mathcal{S}x)(t)\|_{\mathsf{Y}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Donc, $\mathcal{S}$ est continue.

Ainsi, à partir des étapes $2-5$ et par le théorème d'Ascoli-Arzela, on peut conclure que $\mathcal{S}$ est complètement continue. Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{S}$ a au moins un point fixe $x(t)$, ce qui est une solution douce à (3.1).

Maintenant, définissons l'ensemble de solutions $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}(t)$, respectivement, par

$$\mathbf{D} = \{x_n \in \mathsf{Y} = \mathsf{C}_{1-\xi;\upsilon}(\mathcal{I}, \mathcal{X}) : x_n = \mathcal{S}x_n, \quad n \geq 1\}$$

$$\mathbf{D}(t) = \{x_n(t) : x_n \in \mathbf{D}, n \geq 1\}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Ensuite, nous avons

Lemme 3.3.2.

*Supposons que toutes les conditions du **Théorème 3.3.1** soient satisfaites. Alors, pour chaque $t \in \mathcal{I}$, $\mathbf{D}(t)$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$, et $\mathbf{D}$ est équicontinu sur $\mathcal{I}$.*

Démostration 3.3.2.

La preuve est réalisée avec les mêmes étapes que ci-dessus (étapes 2-5).

Démostration du Théorème 3.3.1: Nous démontrons que l'ensemble de solutions $\mathbf{D}$ de (3.1) est relativement compact dans Y. Pour cela, il suffit de vérifier que $\mathbf{D}(0)$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$ et que $\mathbf{D}$ est équicontinu en $t = 0$, en raison du **Lemme 3.3.2**.

Pour tout $x_n \in \mathbf{D}$, avec $n \geq 1$, on définit

$$\widetilde{x}_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & t \in [\sigma, \mathsf{T}], \\ x_n(\sigma) & t \in [0, \sigma], \end{cases} \tag{3.15}$$

où σ provient de la condition ($\mathbb{H}3$). De plus, on vérifie selon la condition ($\mathbb{H}3$) que $\mathsf{q}(x_n) = \mathsf{q}(\widetilde{x}_n)$.

D'aprés le **lemme 3.3.2**, nous constatons que $\{\widetilde{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$, est relativement compact dans Y et sans perte de généralité supposons que $\widetilde{x}_n(.) \to x_1(.)$ dans Y lorsque $n \to \infty$, pour certains $x_1(.)$, ainsi, par

la continuité de $\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(t,0)\mathbb{G}_\upsilon^{\beta_1,\beta_2}(t,s)$ et q, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|x_n(0) - x_1(0)\|_{\mathsf{Y}} &\leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|x_n(0) - x_1(0)\| \\ &\leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|\mathbb{G}_\upsilon^{\beta_1,\beta_2}(0,0)[x_0 - \mathsf{q}(x_n) - x_0 + \mathsf{q}(x_1)]\| \\ &\leq \mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|\mathsf{q}(x_n) - \mathsf{q}(x_1)\| \\ &\leq \|\mathsf{q}(\widetilde{x}_n) - \mathsf{q}(x_1)\|_{\mathsf{Y}} \\ &\to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Alors, $\mathbf{D}(0)$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$.

D'autre part, comme $\mathbf{D}(0) = \{x_0 - \mathsf{q}(x_n) : x_n \in \mathbf{D}\}_{n=1}^{\infty}$ est relativement compact dans $\mathcal{X}$, pour $t \in \mathcal{I}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(0)\|_{\mathsf{Y}} &\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\|x_n(t) - x_n(0)\| \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\left\|\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathsf{q}(x_n)] - \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(0,0)[x_0 - \mathsf{q}(x_n)]\right\| \\
&+ \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\left\|\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x_n)),\varphi_{x_n})(s) + \varphi_{x_n}(s)]ds\right\| \\
&\leq \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\left\|\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)x_0 - x_0\right\| \\
&+ \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\left\|\left[\mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0) - \mathbb{I}\right]\mathsf{q}(x_n)\right\| \\
&+ \mathcal{Q}_{\upsilon}^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\left\|\int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x_n)),\varphi_{x_n})(s) + \varphi_{x_n}(s)]ds\right\|
\end{aligned}$$

$\|x_n(t) - x_n(0)\|_{\mathsf{Y}} \to 0$ uniformément en $n \in \mathbb{N}$ lorsque $t \to 0$. Ainsi, nous vérifions que l'ensemble $\mathbf{D} \subseteq \mathsf{Y}$

est équicontinu en $t = 0$. Par conséquent, $\mathbf{D}$ est relativement compact dans Y. Par conséquent, nous pouvons supposer que $x_n \to x^* \in \mathsf{Y}$ lorsque $n \to \infty$ pour certains x^*. Parce que

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= \mathbb{G}_{\upsilon}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathsf{q}(x_n)] \\
&+ \int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x_n)),\varphi_{x_n})(s) + \varphi_{x_n}(s)]ds,
\end{aligned}$$

en prenant la limite lorsque $n \to \infty$ des deux côtés, nous obtenons

$$\begin{aligned}
x^*(t) &= \mathbb{G}_{\eta}^{\beta_1,\beta_2}(t,0)[x_0 - \mathsf{q}(x^*)] \\
&+ \int_0^t \mathbb{A}_{\beta_1}^{\upsilon}(t,s)\mathbb{K}_{\upsilon}^{\beta_1}(t,s)[-\mathfrak{B}\mathcal{W}(x_0 - \mathsf{q}(x^*)),\varphi_{x^*})(s) + \varphi_{x^*}(s)]ds,
\end{aligned}$$

pour $0 \leq t \leq \mathsf{T}$, ce qui indique que $x^*(.)$ est une solution douce de (3.1).

Par conséquent, le système fractionnaire υ-Hilfer (3.1) est exactement nul contrôlable sur $\mathcal{I}$.

3.4 Exemple

Dans cette section, nous présentons un exemple qui illustre la validité et l'applicabilité des principaux résultats.

Considérons le système de contrôle suivant, décrit par l'équation différentielle partielle fractionnaire de υ-Hilfer

$$
\begin{aligned}
&{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}x(t,z)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial z^2}x(t,z)+\phi(t,z)+\frac{(5t-2)e^{-t}|x(t,z)|}{25(1+|x(t,z)|)}+\frac{5cos|x(t,z)|-2}{5}.\frac{\left|{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|}{4\left(1+\left|{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|\right)} \qquad (3.16)\\
&+(2t-1)arctan|x(t,z)|.\frac{\left|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|}{25\left(1+\left|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|\right)}, \quad (t,z)\in(0,1]\times[0,1]
\end{aligned}
$$

avec

$$
\mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\frac{2}{3})(1-\frac{1}{4});t}[x(t,z)]_{t=0}+\frac{x(t,z)}{15(1+|x(t,z)|)}=x_0(z), \qquad (3.17)
$$

et

$$
x(t,0)=x(t,1)=0, \qquad (3.18)
$$

où ${}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}$ est la dérivée fractionnaire de υ-Hilfer d'ordre $\beta_1=\frac{2}{3}$, $\beta_2=\frac{1}{4}$, $\upsilon(t)=t$, et $0<\xi<1$, $\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t}$ est l'intégrale fractionnaire de υ-Riemann-Liouville d'ordre β_2 avec $\upsilon(t)=t$, et $\mathsf{T}=1$.

Soit $x(t)(z)=x(t,z)$ et les fonctions définies comme

$$
\begin{aligned}
\varphi_x(t)(z) &= \frac{(5t-2)e^{-t}|x(t,z)|}{25(1+|x(t,z)|)}+\frac{5cos|x(t,z)|-2}{5}.\frac{\left|{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|}{4\left(1+\left|{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|\right)}\\
&+(2t-1)arctan|x(t,z)|.\frac{\left|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|}{25\left(1+\left|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t}x(t,z)\right|\right)}, \quad \mathsf{q}(x)(z)=\frac{x(t,z)}{15(1+|x(t,z)|)}.
\end{aligned}
$$

Pour x_1, $x_2\in\mathcal{X}$ et $t\in(0,1]$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_{x_1}(t)(z)-\varphi_{x_2}(t)(z)\| &\le \frac{3}{25}\|x_1(t)(z)-x_2(t)(z)\|\\
&+\frac{3}{25}\left\|{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}x_1(t)(z)-{}^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t}x_t(z)\right\|\\
&+\frac{\pi}{50}\left\|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t}x_1(t)(z)-\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t}x_2(t)(z)\right\|
\end{aligned}
$$

$$
\|g(x)(z)\|\le\frac{1}{15}
$$

Cela signifie que les hypothèses $(\mathbb{H}2)$ et $(\mathbb{H}3)$ sont satisfaites avec $\mathsf{L}_1=\frac{3}{25}$, $\mathsf{L}_2=\frac{3}{25}$, $\mathsf{L}_3=\frac{\pi}{50}$ et $\mathsf{L}=\frac{1}{15}$.

L'opérateur linéaire borné $\mathfrak{B} : \mathfrak{U} \to \mathcal{X}$ est défini par

$$\mathfrak{B}u(t)(z) = \phi(t,z), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad u \in \mathfrak{U}.$$

Pour étudier ce système, prenons $\mathcal{X} = \mathfrak{U} = \mathbf{L}^2([0,1])$, et l'opérateur $\mathbb{E} : \mathsf{D}(\mathbb{E}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ donné par $\mathbb{E} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ avec

$$\mathsf{D}(\mathbb{E}) = \left\{ \quad x \in \mathcal{X} : x, \frac{\partial x}{\partial z} \quad sont \quad absolument \quad continues, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \in \mathcal{X}, \quad x(0) = x(1) = 0 \right\}.$$

Il est connu que $\mathbb{E}$ est auto-adjoint et possède des valeurs propres $\lambda_n = -n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}$, avec les vecteurs propres normalisés correspondants $e_n(z) = \sqrt{2}sin(n\pi z)$. De plus, $-\mathbb{E}$ engendre un semi-groupe fortement continu d'opérateur linéaire borné $\{\mathcal{G}(t)\}_{t\geq 0}$, sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{X}$ avec $\|\mathcal{G}(t)\| \leq e^{-t} \leq 1$, qui est donné par,

$$\mathcal{G}(t) = (y,1) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}(y,e_n)e_n$$

$$= \int_0^1 y(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi^2 t} sin(n\pi z) \int_0^1 sin(n\pi\tau)y(\tau)d\tau, \quad y \in \mathcal{X},$$

en plus, les deux opérateurs $\mathbb{G}_t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(t,s)$ et $\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}(t,s)$ peuvent être définis par,

$$\mathbb{G}_t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(t,s)y = \mathfrak{I}_{0^+}^{-\frac{1}{4};t} \int_0^{+\infty} h_{\frac{2}{3}}(\Theta)\mathcal{G}[(t-s)^{\frac{2}{3}}\Theta]yd\Theta,$$

et

$$\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}(t,s)y = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \theta h_{\frac{2}{3}}(\Theta)\Phi[(t-s)^{\frac{2}{3}}\theta]yd\Theta.$$

On remarque que,

$$\|\mathbb{G}_t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(t,s)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{4})}, \qquad \|\mathcal{T}_t^{\frac{2}{3}}(t,s)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

Maintenant, soit $u \in L^2([0,1],\mathfrak{U})$, $\mathfrak{B} = \mathbb{I}$, donc $\mathfrak{B}^* = \mathbb{I}$. Ainsi, le système (3.16)-(3.18) peut être écrit sous la forme (3.1).

Nous considérons le système linéaire υ-Hilfer fractionnaire,

$$^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t} y(t,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} y(t,z) + \phi(t,z) + \varphi(t,z), \quad (t,z) \in (0,1] \times [0,1], \tag{3.19}$$

avec

$$\mathfrak{I}_{0^+}^{(1-\frac{2}{3})(1-\frac{1}{4});t} y(0,z) + \frac{z}{15(1+|x(t,z)|)} = y_0(z), \tag{3.20}$$

et

$$y(t,0) = y(t,1) = 0, \tag{3.21}$$

où

$$\varphi(t,z) = \frac{(5t-2)e^{-t}z}{25(1+z)} + \frac{5cosz-2}{5}.\frac{\left|{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t} z\right|}{4\left(1+\left|{}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{2}{3},\frac{1}{4};t} z\right|\right)}$$

$$+ (2t-1)arctanz.\frac{\left|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t} z\right|}{25\left(1+\left|\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{4};t} z\right|\right)}.$$

Le système (3.19)-(3.21) est exactement nul contrôlable, s'il existe un $k > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\mathbb{A}_{\frac{2}{3}}^{t}(1,s)\right)^2 \left\|\mathfrak{B}^* \left(\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}\right)^*(1,s)y\right\|^2 ds \\ \geq\ & k\left[\left\|\left(\mathbb{G}_t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}\right)^*(1,0)y\right\|^2 + \int_0^1 \left(\mathbb{A}_{\frac{2}{3}}^{t}(1,s)\right)^2 \left\|\left(\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}\right)^*(1,s)y\right\|^2 ds\right] \end{aligned} \tag{3.22}$$

ou de manière équivalente

$$\int_0^1 (1-s)^{-\frac{2}{3}} \left\|\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}(1,s)y\right\|^2 ds$$

$$\geq k\left[\left\|\mathbb{G}_t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(1,0)y\right\|^2 + \int_0^1 (1-s)^{-\frac{2}{3}} \left\|\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}(1,s)y\right\|^2 ds\right]$$

Si $\varphi = 0$ dans (3.19)-(3.21), alors le système linéaire υ-Hilfer fractionnaire est exactement nul contrôlable si,

$$\int_0^1 (1-s)^{-\frac{2}{3}} \left\|\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}(1,s)y\right\|^2 ds \geq \left\|\mathbb{G}_t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(1,0)y\right\|^2$$

donc,

$$\int_0^1 (1-s)^{-\frac{2}{3}} \left\|\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}(1,s)y\right\|^2 ds$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\left\|\mathbb{G}_t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(1,0)y\right\|^2 + \int_0^1 (1-s)^{-\frac{2}{3}} \left\|\mathbb{K}_t^{\frac{2}{3}}(1,s)y\right\|^2 ds\right]$$

Ainsi, (3.22) est vérifié avec $k = \frac{1}{2}$. Par conséquent, le système linéaire fractionnaire de υ-Hilfer (3.19)-(3.21) est exactement nul contrôlable sur $(0, 1]$, et L'hypothèse $(\mathbb{H}1)$ est donc vérifiée.

Dans notre exemple, nous choisissons $\|\mathcal{W}\| = \|\mathbb{E}\| = \|\mathfrak{B}\| = \|\mathbb{I}\| = 1$, $\mathcal{K}_0 = 1$ (parce que $\|\mathcal{G}(t)\| \leq e^{-t}$) et $\varrho = 0,05$. Nous obtenons $\mathcal{Q}_t^{1-\frac{3}{4}}(1,0) = 1$, $A_1 = 0.81605$, $A_2 = 0.73849$, $\Lambda(\frac{2}{3}, 1) = 0.47392$, $w = 0.1885$ et $\mathsf{h}(1) = 3$. Ensuite, nous obtenons l'approximation suivante:

$$\mathbb{A}_1\mathsf{L} + \mathbb{A}_2\mathcal{Q}_t^{\frac{1}{4}}(1,0)\Gamma(\frac{2}{3})\left[\Lambda(\frac{2}{3}, 1) + \frac{wl}{L_2}\left(\mathsf{L} + \varrho_1\sqrt{\mathsf{h}(1)}\right)\right] \approx 0.76909 < 1.$$

Toutes les hypothèses du **théorème 3.3.1** sont satisfaites et

$$\mathbb{A}_1\mathsf{L} + \mathbb{A}_2\mathcal{Q}_\upsilon^{1-\xi}(\mathsf{T},0)\Gamma(\beta_1)\left[\Lambda(\beta_1, \mathsf{T}) + \frac{wl}{\mathsf{L}_2}\left(\mathsf{L} + \varrho_1\sqrt{\mathsf{h}(\mathsf{T})}\right)\right] < 1.$$

Alors l'équation aux dérivées partielles fractionnaires de υ-Hilfer avec contrôle (3.19)- (3.21) est exactement nulle contrôlable sur $\mathcal{I}$.

Chapitre 4

Contrôlabilité de trajectoire du système intégro-différentiel neutre fractionnaire de type sobolev (k, υ)-Hilfer dans l'espace de Hilbert

Contents

4.1 Introduction

Une nouvelle notion de contrôlabilité, à savoir la contrôlabilité de trajectoire, a été introduite par George (1996) pour les systèmes non linéaires unidimensionnels. La contrôlabilité de la trajectoire garantit le pilotage du système dynamique d'un état initial à un état final souhaité, le long d'une trajectoire déterminée, en utilisant une fonction de contrôle appropriée. Divers articles ont contribué à l'étude de la contrôlabilité de la trajectoire. [[9], [13], [20]]. Par conséquent, la contrôlabilité du chemin est une notion de contrôle plus forte.

Chalishajar et all. [13] ont étudié la contrôlabilité de trajectoire de systèmes intégro-différentiels non linéaires dans des systèmes de dimension finie et infinie. Maojun Bin et Zhenhai Liu [9] ont étudié la contrôlabilité de la trajectoire des équations d'évolution différentielle semi-linéaires, avec impulsions et retard, en utilisant le théorème du point fixe et la théorie des opérateurs monotones.

Diblik [28] a étudié la contrôlabilité de trajectoire de systèmes linéaires à temps discret avec un seul retard.

4.2 Position problème

Dans cette section, nous examinons la contrôlabilité de trajectoire d'une nouvelle catégorie de classe d'équations intégro-différentielles fractionnaires de $(\mathsf{k};\upsilon)$-Hilfer non linéaires, avec des conditions non locales fractionnaires de $(\mathsf{k};\upsilon)$-Hilfer de la forme,

$$ {}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\eta_1,\eta_2,\mathsf{k}}_{0^+}[\mathcal{A}x(t)-\mathsf{f}(t,x(t))] = \mathrm{T}x(t)+\mathrm{B}u(t)+g\left(t,x(t),{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\eta_3,\upsilon}_{0^+}x(t)\right), \quad t\in(0,\mathsf{b}] \tag{4.1} $$

$$ {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\mathsf{k}(1-\theta),\psi}_{0^+}\left[x(t)-\mathsf{f}(t,x(t)\right]_{t=0} = x_0+\mathsf{K}(x), \quad \theta=\frac{1}{\mathsf{k}}\Big(\eta_2(1-\eta_1)+\eta_1\Big) \tag{4.2} $$

où ${}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\eta_1,\eta_2,\upsilon}_{0^+}$, ${}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}^{\mathsf{k}(1-\theta),\upsilon}_{0^+}$ sont les dérivées fractionnaires de (k,υ)-Hilfer d'ordre $\frac{1}{2}<\frac{\eta_1}{\mathsf{k}}\le 1$, de type $0\le\eta_2\le 1$, $0<\eta_3<1$, $\mathsf{k}>0$ et (k,υ)-intégrale fractionnaire d'ordre $\mathsf{k}\,(1-\theta)$ respectivement. Soit $\mathsf{J}=[0;\mathsf{b}]$, l'état $x(.)$ prend ses valeurs dans un espace de Hilbert et $x_0\in\mathcal{X}$. Les opérateurs $\mathrm{T}:\mathbb{D}(\mathrm{T})\subset\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, $\mathcal{A}:\mathbb{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, La fonction de contrôle $u(.)$ prend des valeurs dans $\mathbf{L}^2(\mathsf{J},\mathbf{U})$, l'espace de Hilbert des fonctions de contrôle admissibles pour un espace de Hilbert $\mathbf{U}$, et B est un opérateur linéaire borné de $\mathbf{U}$ à $\mathcal{X}$. De plus, $g:\mathsf{J}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, $\mathsf{f}:\mathsf{J}\times\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ et $\mathsf{K}:\mathsf{C}(\mathsf{J};\mathcal{X})\to\mathcal{X}$, sont des fonctions appropriées satisfaisant certaines conditions à préciser ultérieurement.

Soit $\theta=\frac{1}{\mathsf{k}}(\eta_2(n\mathsf{k}-\eta_1)+\eta_1)$, $0<\frac{\eta_1}{\mathsf{k}}\le 1$, $0\le\eta_2\le 1$ et $\mathsf{k}>0$. Alors $1-\theta=\dfrac{(\mathsf{k}-\eta_1)(1-\eta_2)}{\mathsf{k}}\ge 0$, définissons

$$ \mathsf{C}_{1-\theta,\mathsf{k};\upsilon}(\mathsf{J},\mathcal{X})=\widehat{\mathsf{C}}=\left\{\quad g(t):\mathsf{J}\to\mathcal{X};\quad {}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}{}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(t,0)g(t)\in\mathsf{C}(\mathsf{J},\mathcal{X})\right\}, $$

où, ${}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}{}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(t,0)=(\upsilon(t)-\upsilon(0))^{1-\theta}$.

L'espace $\widehat{\mathsf{C}}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$ \|g\|_{\widehat{\mathsf{C}}}=\max_{t\in\mathsf{J}}\left|{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}{}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(t,0)g(t)\right|. $$

Pour prouver notre résultat principal, nous faisons les hypothèses suivantes

($\mathcal{H}1$) Les opérateurs $\mathrm{T} : \mathbb{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ et $\mathcal{A} : \mathbb{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, sont des opérateurs linéaires fermés.

($\mathcal{H}2$) $\mathbb{D}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{D}(\mathrm{T})$, $\mathcal{A}$ et T sont bijectives.

($\mathcal{H}3$) $\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{X} \to \mathbb{D}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{X}$ est un opérateur linéaire, borné et compact.

À partir de ($\mathcal{H}3$), nous déduisons que $\mathcal{A}^{-1}$ est un opérateur borné. Remarquez que ($\mathcal{H}3$) implique également que $\mathcal{A}$ est fermé, car le fait que $\mathcal{A}^{-1}$ soit fermé et injectif implique que son inverse est également fermé. Cela découle de $(\mathcal{H}1) - (\mathcal{H}3)$ et du le théorème des graphes fermés, on obtient le caractère borné de l'opérateur linéaire $\mathcal{A}^{-1}\mathrm{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Par conséquent, $V = -\mathcal{A}^{-1}\mathrm{T}$ engendre un semi-groupe $\{\mathbb{V}(t) = e^{-\mathcal{A}^{-1}\mathrm{T}t}, \quad t \geq 0\}$. Nous supposons que $\mu_0 = \underset{t\geq 0}{sup}\|\mathbb{V}(t)\| < \infty$, et enfin, nous désignons par $\|\mathcal{A}^{-1}\| = Q_0$.

($\mathcal{H}4$) Le résolvant $\mathfrak{R}(\alpha; V)$ est compacte pour certains $0 \in \rho(V)$ qui est l'ensemble de résolvant de V.

On suppose que $0 \in \rho(V)$, ainsi, nous pouvons définir la puissance de l'opérateur fractionnaire $V^{\beta}(0 < \beta \leq 1)$. Notons $\mathcal{X}_{\beta}$ l'espace de Banach du domaine $\mathbb{D}(V^{\beta})$, où $\mathbb{D}(V^{\beta})$ est l'espace de Hilbert associé à la norme

$$\|x\|_{\beta} = \|V^{\beta}x\|; \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{D}(V^{\beta})$$

Remarque 4.2.1.

Pour $\beta \in (0, 1]$, la puissance de l'opérateur fractionnaire V^{β} vérifie les propriétés suivantes:

(i) V^{β} *est un opérateur linéaire, béjectif et fermé.*

(ii) $V^{\beta} = (V^{-\beta})^{-1}$, *où* $V^{-\beta}$ *est l'opérateur linéaire, borné et injectif dans* $\mathcal{X}$ *avec* $\mathbb{D}(V^{\beta}) = Im(V^{-\beta})$.

(iii) *Soit* $\beta, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{D}(V^{p'})$, *où* $p' = max(\beta, \alpha_0, \beta + \alpha_0)$ *alors*

$$V^{\beta+\alpha_0}x = V^{\beta}V^{\alpha_0}x = V^{\alpha_0}V^{\beta}x$$

De plus, $V^0 = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ *est l'identité en* $\mathcal{X}$.

Lemme 4.2.1. *[53]*

Soit V *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique* $\mathbb{V}(t)$. *Si* $0 \in \rho(V^{\beta})$, *alors*

1. $\mathbb{V}(t) : \mathcal{X} \to \mathbb{D}(V^{\beta})$ *pour tout* $t > 0$ *et* $\beta \geq 0$.

2. *pour tout* $x \in \mathbb{D}(V^{\beta})$, *nous avons*

$$V^{\beta}\mathbb{V}(t)x = \mathbb{V}(t)V^{\beta}x, \quad t \geq 0.$$

3. *Si* $0 < \beta < \beta_0 \leq 1$, *alors* $\mathbb{D}(V^{\beta_0}) \hookrightarrow \mathbb{D}(V^{\beta})$.

4. *Pour chaque* $t > 0$, $V^{\beta}\mathbb{V}(t)$ *est borné sur* $\mathcal{X}$ *et il existe* $C_{\beta} > 0$ *et* $\alpha_0 > 0$ *tel que*

$$\|V^{\beta}\mathbb{V}(t)\| \leq \frac{C_{\beta}}{t^{\beta}}e^{-\alpha_0 t} \leq \frac{C_{\beta}}{t^{\beta}}.$$

Remarque 4.2.2.

Pour simplifier la notation et la démonstration de certains résultats, nous introduirons la notation suivante;

$${}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,0) = (\upsilon(t) - \upsilon(0))^{\frac{\eta_1}{\mathsf{k}}}, \quad G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(t)) = g\left(t, x(t), {}_{k}I_{0^+}^{\eta_3,\upsilon}x(t)\right).$$

D'après le **Lemme 1.4.6** , nous avons l'estimation intégrale

$$\begin{aligned} {}_{k}\mathfrak{I}_{0^+}^{\eta_3,\upsilon}\|x(t)\| &= {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\eta_3,\upsilon}\left\|{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(\theta-1)}(t,0)\ {}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(t,0)\,x(t)\right\| \\ &\leq \frac{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta)}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta+\eta_3)}\ {}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(\theta-1)+\eta_3}(t,0)\,\|x\|_{\widehat{\mathsf{C}}}. \end{aligned}$$

La fonction de densité de probabilité (**de type Wright**), peut être également affinée en une fonction k-densité de probabilité (**de type** k**-Wright**), définie comme suit

Définition 4.2.1.

La fonction de type k*-Wright* $h_{\eta_1,\mathsf{k}}$, *est définie comme suit*

$$h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!\mathsf{k}^{\eta_1 n}\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(1-\eta_1 n))}, \quad \Theta \in (0,\infty), \quad 0 < \frac{\eta_1}{\mathsf{k}} \leq 1,$$

avec, $h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta) \geq 0$, $\int_0^{\infty} h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)d\Theta = 1$

$$et \quad \int_0^{\infty} \Theta^{\zeta}h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)d\Theta = \frac{\mathsf{k}^{\zeta(\eta_1-1)}\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(1+\zeta))}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(1+\zeta\eta_1))}.$$

Remarque 4.2.3.

On voit que la fonction de type k*-Wright, est une généralisation de la fonction exponentielle.*

En effet, pour $\eta_1 = 0$ *et* $\mathsf{k} = 1$ *alors, nous avons* $h_{0,1}(\Theta) = e^{-\Theta}$*. Pour* $0 < \eta_1 \leq 1$

et $\mathsf{k} = 1$*, nous obtenons la fonction de type Wright.*

Pour $x \in \mathcal{X}$, on définit deux familles d'opérateurs $\{{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t); t \geq 0\}$ et $\{{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t); t \geq 0\}$, par

$$ {}_{\mathsf{k}}\mathbb{R}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x = \int_0^{+\infty} \mathcal{A}^{-1} h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)\mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Theta]xd\Theta $$

$$ {}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)x = {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\mathsf{k}(\theta-1);\upsilon}\, {}_{\mathsf{k}}\mathbb{R}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x $$

et

$$ {}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x = \frac{\eta_1}{\mathsf{k}} \int_0^{+\infty} \mathcal{A}^{-1}\Theta h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)\mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Theta]xd\Theta $$

Lemme 4.2.2. *([53], [3], [80])*

Les opérateurs ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}$ *et* ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}$ *ont les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout* $t \leq s \leq 0$ *fixe,* ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}$ *et* ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}$ *sont des opérateurs linéaires bornés en* $\mathcal{X}$ *avec,*

$$ \|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)x\| \leq \frac{\mu_0 Q_{0\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(\theta-1)}(\mathsf{b},0)}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta)}\|x\| = \mu_1\|x\|. $$

et

$$ \|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x\| \leq \frac{\mu_0 \mathsf{k}^{(\eta_1-2)} Q_0}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\eta_1)}\|x\| = \mu_2\|x\|, $$

où, $\theta = \frac{1}{k}\bigg(\eta_2(\mathsf{k}-\eta_1)+\eta_1\bigg)$.

(2) *Les opérateurs* ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)$ *et* ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)$ *sont fortement continus pour tout* $t \geq s \geq 0$*, c'est-à-dire pour chaque* $x \in \mathcal{X}$*,* $0 \leq s \leq t_1 < t_2 \leq \mathsf{b}, et \mathsf{k} > 0$ *nous avons,*

$$ \|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t_2,s)\,x - {}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t_1,s)\,x\| \longrightarrow 0, $$

et

$$ \|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_2,s)\,x - {}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_1,s)\,x\| \longrightarrow 0, $$

lorsque $t_2 - t_1 \longrightarrow 0$.

Démonstration 4.2.1.

(1) *Pour toute* $x \in \mathcal{X}$*,* $0 \leq s \leq t \leq \mathsf{b}$*, et de l'égalité*

$\int_0^{+\infty}\Theta^{\zeta}h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)d\Theta=\frac{\mathsf{k}^{\zeta(\eta_1-1)}\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(1+\zeta))}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(1+\zeta\eta_1))}$, $(\zeta=0 \quad et \quad \zeta=1)$, *nous avons*

$$\begin{aligned}\left\|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{R}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x\right\| &= \left\|\int_0^{+\infty}\mathcal{A}^{-1}h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)\mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Theta]xd\Theta\right\| \\ &\le \mu_0Q_0\left\|\int_0^{+\infty}h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)d\Theta\right\|\|x\| \\ &\le \mu_0Q_0\|x\|,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x\right\| &= \left\|\frac{\eta_1}{\mathsf{k}}\int_0^{+\infty}\mathcal{A}^{-1}\Theta h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)\mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Theta]xd\Theta\right\| \\ &\le \frac{\eta_1}{\mathsf{k}}\mu_0Q_0\left\|\int_0^{+\infty}\Theta h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)d\Theta\right\|\|x\| \\ &\le \frac{\mu_0Q_0\mathsf{k}^{\eta_1-2}}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\eta_1)}\|x\|.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\left\|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)x\right\| &= \left\|{}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\mathsf{k}(\theta-1);\upsilon}\,{}_{\mathsf{k}}\mathbb{R}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x\right\| \\ &\le {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\mathsf{k}(\theta-1);\upsilon}\left\|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{R}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\right\|\|x\| \\ &\le \mu_0Q_0\left\|\frac{1}{\mathsf{k}\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(\theta-1))}\int_0^t\upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{\frac{\mathsf{k}(\theta-1)}{\mathsf{k}}-1}ds\right\|\|x\| \\ &\le \frac{\mu_0Q_0\,{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(\theta-1)}(\mathsf{b},0)}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta)}\|x\|.\end{aligned}$$

Par conséquent, les opérateurs ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)$ *et* ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)$ *sont bornés par des bornes* μ_1 *et* μ_2 *respectivement.*

(2) Soit $\{x_n\}$ *un séquence dans un espace de Hilbert* $\mathcal{X}$, *convergeant vers* $x\in\mathcal{X}$, *et considérons,*

$$\left\|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)x_n-{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)x\right\|\le\mu_1\|x_n-x\|.$$

Par conséquent, ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)$ *est continue.*

De même, nous pouvons démontrer que ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)$ *est continue pour tous* $0\le s\le t\le\mathsf{b}$.

De manière évidente, ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)$ *et* ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)$ *sont fortement continues, alors on a*

$$\left\|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_2,s)x - {}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_1,s)x\right\| \leq \frac{\eta_1}{\mathsf{k}}\int_0^{+\infty} \|\mathcal{A}^{-1}\|\Theta h_{\eta_1,\mathsf{k}}(\Theta)\left\|\mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_2,s)\Theta] - \mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_1,s)\Theta]\right\|\|x\|d\Theta$$

$$\leq \frac{Q_0\mathsf{k}^{\eta_1-2}}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\eta_1)}\left\|\mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_2,s)\Theta] - \mathbb{V}[{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1}(t_1,s)\Theta]\right\|\|x\|,$$

qui tend vers zéro lorsque $t_2 - t_1 \to 0$, *pour tout* $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 \leq \mathsf{b}$, $\mathsf{k} > 0$ *et* $x \in \mathcal{X}$.

De la même manière, ${}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,s)$ *est également fortement continue. Ceci complète la démonstration du lemme.*

Lemme 4.2.3. *[11], [53]*

Pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\eta_1 \in (0,1)$ *et* $\beta \in (0,1]$, *nous avons*

$$V(t,s){}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}x = V^{1-\beta}{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)V^{\beta}x,$$

et

$$\|V^{\beta}{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)x\| \leq \mu_3(\beta,\eta_1,\mathsf{k}){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{-\eta_1\beta}(t,s)\|x\|, \quad 0 < s \leq t \leq \mathsf{b},$$

où, $\quad \mu_3(\beta,\eta_1,\mathsf{k}) = \dfrac{\eta_1 C_\beta Q_0 \mathsf{k}^{(1-\beta)(\eta_1-1)-1}\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(2-\beta))}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(1+\eta_1(1-\beta))}.$

Définition 4.2.2.

Une solution $x(.) = x(u)(.) \in \widehat{\mathsf{C}}$ *est dite une solution douce de* (4.1)-(4.2) *si pour chaque contrôle* $u \in \mathbf{L}^2(\mathsf{J},\mathbf{U})$, *elle satisfait,*

(i) $\quad {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\mathsf{k}(1-\theta),\upsilon}\left[x(t) - \mathsf{f}(t,x(t)\right]_{t=0} = x_0 + \mathsf{K}(x),$

(ii) *Pour chaque* $0 \leq t \leq \mathsf{b}$, *elle satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} x(t) &= {}_{k}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,0)\Big[x_0 + \mathsf{K}(x) + \mathsf{f}(0,x(0)) - \mathcal{A}^{-1}\mathsf{f}(0,x(0))\Big] \\ &+ \mathcal{A}^{-1}\mathsf{f}(t,x(t)) + \int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\mathcal{A}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\mathsf{f}(s,x(s))ds \\ &+ \int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s){}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Big[G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(s)) + \mathrm{B}u(s)\Big]ds. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nous donnons une inégalité de Gronwall généralisée sous la forme $(\mathsf{k};\upsilon)$-Hilfer, qui sera utilisée dans la section suivante.

Théorème 4.2.1. *[39]*

Soient $\eta_1, \mathsf{k} > 0$, et $\upsilon \in \mathsf{C}^1[0,\mathsf{b}]$ est une fonction croissante avec $\upsilon'(t) \neq 0$.

Pour tout $t \in \mathsf{J}$, Supposons que (i) Les fonctions $\mathsf{w}(t)$ et $\mathsf{v}(t)$, sont deux fonctions non négatives localement intégrables sur l'intervalle J,

(ii) La fonction $\varphi(t) \geq 0$ est un fonction continue non décroissante sur J.

$$Si \quad \mathsf{w}(t) \leq \mathsf{v}(t) + \frac{\varphi(t)}{\mathsf{k}} \int_0^t \upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{\frac{\eta_1}{\mathsf{k}}-1}\mathsf{w}(s)ds,$$

alors,

$$\mathsf{w}(t) \leq \mathsf{v}(t) + \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\varphi(t)\Gamma_{\mathsf{k}}(\eta_1)]^m}{\mathsf{k}\Gamma_{\mathsf{k}}(m\eta_1)} \upsilon'(s)(\upsilon(t)-\upsilon(s))^{\frac{m\eta_1}{\mathsf{k}}-1}\mathsf{v}(s)ds, \quad pour\ tout \quad t \in \mathsf{J}.$$

Définition 4.2.3.

Le système de contrôle fractionnaire (k,υ)-Hilfer (4.1)-(4.2) est dit être complètement contrôlable sur l'intervalle J, si pour tout $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$, il existe un contrôle $u \in \mathbf{U}$ tel que la solution (4.3) de (4.1)-(4.2) satisfait $x(\mathsf{b}) = x_1$.

Définition 4.2.4.

Le système de contrôle fractionnaire (k,υ)-Hilfer (4.1)-(4.2) est totalement contrôlable sur l'intervalle J, s'il est complètement contrôlable sur tous ses sous-intervalles $[s_{\mathsf{k}}, s_{\mathsf{k}+1}]$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $y(.)$ définies sur l'intervalle J satisfaisant $y(0) = x_0$ et $y(\mathsf{b}) = x_1$, et que la dérivée fractionnaire de (k,υ)-Hilfer existe partout. L'ensemble $\mathcal{F}$ est appelé l'ensemble de toutes les trajectoires faisables.

Définition 4.2.5.

Le système de contrôle fractionnaire (k,υ)-Hilfer (4.1)-(4.2), est dit être contrôlable en trajectoire ($\mathcal{T}$-Contrôllable) si, pour tout $y \in \mathcal{F}$, il existe une fonction de contrôle $u \in \mathsf{U}$ telle que la solution correspondante $x(t)$ de l'équation (4.3) satisfait, $x(t) = y(t)$ presque partout.

4.3 Contrôlabilité de trajectoire

Dans cette section, nous allons discuté la contrôlabilité en trajectoire du système gouverné par l'équation intégro-différentielle neutre fractionnaire, de type Sobolev (k, υ)-Hilfer (4.1)-(4.2). Pour en discuter, nous imposons les conditions nécessaires suivantes:

($\mathbb{H}1$) La fonction non linéaire $g : \mathsf{J} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, est continue et il existe des constantes $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_2$ telles que

$$\|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)\| \leq \mathbb{L}_1 \|x_1 - x_2\| + \mathbb{L}_2 \|y_1 - y_2\|,$$

pour tout $t \in \mathsf{J}$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{X}$.

($\mathbb{H}2$) Il existe une constante $\mathbb{L}_{\mathsf{f}} > 0$, telle que

$$\|V^{\beta}\mathsf{f}(t, x(t)) - V^{\beta}\mathsf{f}(t, y(t))\| \leq \mathbb{L}_{\mathsf{f}} \|x - y\|,$$

pour tout $t \in \mathsf{J}$, $x, y \in \mathcal{X}$.

($\mathbb{H}3$) La fonction non locale $\mathsf{K} : \mathsf{C}(\mathsf{J}, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ est continue et il existe une constante $\mathbb{L}_{\mathsf{K}} > 0$, telle que cela satisfait

$$\|\mathsf{K}(x) - \mathsf{K}(y)\| \leq \mathbb{L}_{\mathsf{K}} \|x - y\|$$

pour tout $x, y \in \mathsf{C}(\mathsf{J}, \mathcal{X})$.

Théorème 4.3.1.

Supposons que les hypothèses ($\mathbb{H}1$)-($\mathbb{H}3$) *soient satisfaites, alors, le système de contrôle fractionnaire de* (k, υ)*-Hilfer* (4.1)-(4.2) *est contrôlable en trajectoire sur* J.

Démostration 4.3.1.

Soit $y(t)$ représentant n'importe quelle trajectoire de $\mathcal{F}$. Pour $\frac{1}{2} < \frac{\eta_1}{\mathsf{k}} \leq 1$, $0 \leq \eta_2 \leq 1$ et $\mathsf{k} > 0$, nous sélectionnons le contrôle de rétroaction $u(t)$ comme

$$u(t) = \mathrm{B}^{-1}\Big({}^{H}_{\mathsf{k}}\mathfrak{D}^{\eta_1, \eta_2, \upsilon}_{0^+}[\mathcal{A}y(t) - \mathsf{f}(t, y(t))] - \mathrm{T}y(t) - G^{\eta_3}_{\upsilon}(y(t)) \Big) \tag{4.4}$$

En intégrant la valeur de $u(t)$ dans l'équation (4.1)-(4.2) et en simplifiant, nous obtenons

$$ {}_{\mathsf{k}}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\eta_1,\eta_2,\upsilon}\Big[\mathcal{A}x(t)-\mathsf{f}(t,x(t))-\mathcal{A}y(t)+\mathsf{f}(t,y(t))\Big]=\mathrm{T}(x(t)-y(t))+G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(t))-G_{\upsilon}^{\eta_3}(y(t)) \tag{4.5}$$

Encore une fois, si nous choisissons $\mathcal{A}\mathcal{Z}(t)=\mathcal{A}(x(t)-y(t))$, alors notre problème (4.1)-(4.2) est modifié comme ceci :

$$\begin{cases} {}_{\mathsf{k}}^{H}\mathfrak{D}_{0^+}^{\eta_1,\eta_2,\upsilon}[\mathcal{A}\mathcal{Z}(t)-\mathsf{f}(t,x(t))+\mathsf{f}(t,y(t))] = \mathrm{T}\mathcal{Z}(t)\ +G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(t))-G_{\upsilon}^{\eta_3}(y(t)), \quad t\in \mathsf{J}\\ {}_{\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\mathsf{k}(1-\theta),\upsilon}\left[\mathcal{Z}(t)-\mathsf{f}(t,x(t))+\mathsf{f}(t,y(t))\right]_{t=0} = \mathsf{K}(x)-\mathsf{K}(y), \end{cases} \tag{4.6}$$

La solution douce de l'équation (4.6) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t) &= {}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,0)\Big[\mathsf{K}(x)-\mathsf{K}(y)\Big]+\mathcal{A}^{-1}\Big(\mathsf{f}(t,x(t))-\mathsf{f}(t,y(t))\Big)\\ &+ \int_0^t \upsilon'(s)_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)V_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Big[\mathsf{f}(s,x(s))-\mathsf{f}(s,y(s))\Big]ds\\ &+ \int_0^t \upsilon'(s)_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Big[G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(s))-G_{\upsilon}^{\eta_3}(y(s))\Big]ds \end{aligned} \tag{4.7}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}} &= \|_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(t,0)\mathcal{Z}(t)\|\\ &\leq {}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(\mathsf{b},0)\|\mathcal{Z}(t)\|\\ &\leq {}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(\mathsf{b},0)\Big\|\Big[{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,0)\Big(\mathsf{K}(x)-\mathsf{K}(y)\Big)+\mathcal{A}^{-1}\Big(\mathsf{f}(t,x(t))-\mathsf{f}(t,y(t))\Big)\\ &+\int_0^t \upsilon'(s)_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)V_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Big(\mathsf{f}(s,x(s))-\mathsf{f}(s,y(s))\Big)ds\\ &+\int_0^t \upsilon'(s)_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Big(G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(s))-G_{\upsilon}^{\eta_3}(y(s))\Big)ds\Big]\Big\| \end{aligned}$$

Alors,

$$\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}} \leq {}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(\mathsf{b},0)\bigg[\Big\|{}_{\mathsf{k}}\mathbb{V}_{\upsilon}^{\eta_1,\eta_2}(t,0)\Big(\mathsf{K}(x)-\mathsf{K}(y)\Big)\Big\|$$

$$+\Big\|\mathcal{A}^{-1}V^{-\beta}\Big(V^{\beta}\mathsf{f}(t,x(t))-V^{\beta}\mathsf{f}(t,y(t))\Big)\Big\|$$

$$+\Big\|\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s){}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)V^{1-\beta}\Big(V^{\beta}\mathsf{f}(t,x(t))-V^{\beta}\mathsf{f}(t,y(t))\Big)ds\Big\|$$

$$+\Big\|\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s){}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Big(G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(s))-G_{\upsilon}^{\eta_3}(y(s))\Big)ds\Big\|\bigg]$$

$$\leq \mu_1\mathbb{L}_{\mathsf{K}}\|x-y\|_{\widehat{\mathsf{C}}}+{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(\mathsf{b},0)\|Q_0\|V^{-\beta}\|\Big\|V^{\beta}\mathsf{f}(t,x(t))-V^{\beta}\mathsf{f}(t,y(t))\Big\|$$

$$+{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(\mathsf{b},0)\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\Big\|V^{1-\beta}{}_{\mathsf{k}}\mathbb{U}_{\upsilon}^{\eta_1}(t,s)\Big\|\Big\|V^{\beta}\mathsf{f}(s,x(s))-V^{\beta}\mathsf{f}(s,y(s))ds\Big\|$$

$$+\mu_{2\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(\mathsf{b},0)\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\Big\|G_{\upsilon}^{\eta_3}(x(s))-G_{\upsilon}^{\eta_3}(y(s))\Big\|ds$$

$$\leq \mu_1\mathbb{L}_{\mathsf{K}}\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}+\|V^{-\beta}\|Q_0\mathsf{L}_{\mathsf{f}}\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}$$

$$+\mu_3(1-\beta,\eta_1,\mathsf{k})\mathbb{L}_{\mathsf{f}}\int_0^t {}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{-\eta_1(1-\beta)}(t,s)\upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}ds$$

$$+\mu_{2\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}(\mathsf{b},0)\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\Big[\mathbb{L}_1\|\mathcal{Z}(t)\|+\mathbb{L}_{2\mathsf{k}}\mathfrak{I}_{0^+}^{\eta_3,\upsilon}\|\mathcal{Z}(t)\|\Big]ds$$

$$\leq \Big(\mu_1\mathbb{L}_{\mathsf{K}}+\|V^{-\eta}\|Q_0\mathbb{L}_{\mathsf{f}}\Big)\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}$$

$$+\mu_3(1-\beta,\eta_1,\mathsf{k})\mathbb{L}_{\mathsf{f}}\frac{\mathsf{k}}{\beta\eta_1}{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta\eta_1}(\mathsf{b},0)\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}$$

$$+\mu_2\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\Big[\mathbb{L}_1\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}+\frac{\mathbb{L}_2\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(\theta-1)+\eta_3}(\mathsf{b},0)}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta+\eta_3)}\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}\Big]ds$$

$$\leq \omega_1\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}+\omega_2\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}$$

$$\leq \frac{\omega_2}{1-\omega_1}\int_0^t \upsilon'(s){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\eta_1-\mathsf{k}}(t,s)\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}}ds$$

où $\omega_2=\mu_2\Big(\mathbb{L}_1+\mathbb{L}_2\frac{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta){}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(\theta-1)+\eta_3}(\mathsf{b},0)}{\Gamma_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}\theta+\eta_3)}\Big)$, $\quad \omega_1=\Big(\mu_1\mathbb{L}_{\mathsf{K}}+\|V^{-\beta}\|Q_0\mathbb{L}_{\mathsf{f}}+\mu_3(1-\beta,\eta_1,\mathsf{k})\mathbb{L}_{\mathsf{f}}\frac{\mathsf{k}}{\beta\eta_1}{}_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\beta\eta_1}(\mathsf{b},0)\Big)$ *et* $\omega_1<1$.

En appliquant l'inégalité de Gronwall dans l'expression ci-dessus, on trouve

$$\|\mathcal{Z}(t)\|_{\widehat{\mathsf{C}}} = \max_{t\in \mathsf{J}} |_{\mathsf{k}}\mathcal{Q}_{\upsilon}^{\mathsf{k}(1-\theta)}\mathcal{Z}(t)| = 0.$$

Par conséquent, $\mathcal{Z}(t) = 0,$ *c'est-à-dire* $x(t) = y(t)$ *presque partout.*

Ainsi, le système de contrôle fractionnaire (k, υ)*-Hilfer* (4.1) - (4.2) *est* $\mathcal{T}$*-contrôlable sur* J.

4.4 Exemple

Considérons la forme suivante du système intégro-différentiel (k, υ)-Hilfer fractionnaire neutre, de type Sobolev avec contrôle pour illustrer notre résultat principal.

$$ {}_1^H\mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{3}{5},\frac{1}{3},t}\left[\left(\mathbb{I} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)x(t,z) - \left(\frac{1+e^{-t}}{5}\right)\cos x(t,z)\beta\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z^2}x(t,z) + \frac{e^{-5t}\sqrt{\sin x\,(t,z)}}{5+|x\,(t,z)|} + e^{-2t}\tan^{-1}|x\,(t,z)|\,.\frac{\left|{}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t}x\,(t,z)\right|}{2+\left|{}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t}x\,(t,z)\right|}$$

$$+ \quad u\,(t)\,, \quad (t,z) \in (0,1] \times [0,\pi], \tag{4.8}$$

avec,

$$x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \tag{4.9}$$

et

$${}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{4}{15},t}\,(x(0,z)) + \int_0^{\pi}\rho\,(z,t)\,x\,(t,z)\,dz - \frac{1}{30}\sum_{j=1}^{15}\log\left(1+|x\,(t_j,z)|\right)$$

$$= x_0\,(z)\,, \qquad 0 < t_j < 1,\ j = 1,2,..,15. \tag{4.10}$$

Ici $\eta_1 = \frac{3}{5},\ \eta_2 = \eta_3 = \frac{1}{3},\ \mathsf{k} = 1,\ \theta = \frac{1}{3}(1-\frac{3}{5}) + \frac{3}{5} = \frac{11}{15},\ \upsilon\,(t) = t$ et $\mathsf{b} = 1$.

Soit $\mathcal{X} = \mathbf{U} := \mathbf{L}^2\,[0,\pi]$. Notons $\mathbb{D}\,(\mathrm{T}) = \mathbb{D}\,(\mathcal{A}) := \Big\{x \in \mathcal{X} : x, \frac{\partial x}{\partial z}$ sont absolument continues, $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \in \mathcal{X},\ x(t,0) = x(t,\pi) = 0\Big\}$.

Nous définissons les opérateurs $\mathrm{T} : \mathbb{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{A} : \mathbb{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ et $\mathfrak{B} = \mathbb{I}$ (l'identité) par

$$\mathrm{T}x = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \quad x \in \mathbb{D}(\mathrm{T}); \quad \mathcal{A}x = \left(\mathbb{I} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) x, \quad x \in \mathbb{D}(\mathcal{A}).$$

Ensuite, T et $\mathcal{A}$ peuvent être écrits respectivement comme

$$\begin{aligned} \mathrm{T}x &= \sum_{m=1}^{\infty} -m^2 (x, \sigma_m)\sigma_m, \; x \in \mathbb{D}(\mathrm{T}), \\ \mathcal{A}x &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + m^2\right)(x, \sigma_m)\sigma_m, \; x \in \mathbb{D}(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

où $\sigma_m(\omega) = (\sqrt{2/\pi}) \sin m\omega, m = 1, 2, ...$ sont les fonctions propres correspondant aux valeurs propres $\left(-m^2\right)$ respectivement et $\sigma_1, \sigma_2, ...$ est une base de $\mathcal{X}$.

De plus, pour tout $x \in \mathcal{X}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}x &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1+m^2}(x, \sigma_m)\sigma_m, \\ \mathcal{A}^{-1}\mathrm{T}x &= Vx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-m^2}{1+m^2}(x, \sigma_m)\sigma_m, \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{V}(t)x = \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-m^2 t}{1+m^2}\right)(x, \sigma_m)\sigma_m,$$

où

$$(x, \sigma_m) = \int_0^{\pi} x(t)\, \sigma_m(t)\, dt.$$

Il est facile de voir que $\mathcal{A}^{-1}$ est compact, borné avec $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| = Q_0 \leq 1$ et $V = \mathcal{A}^{-1}\mathrm{T}$ engendre un semi-groupe fortement continu $\mathbb{V}(t)$ avec $\|\mathbb{V}(t)\| \leq e^{-t} \leq 1 = \mu_0$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour chaque $x \in \mathcal{X}$, $V^{-\frac{1}{2}}x = \sum_{m=1}^{\infty} -\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}}(x, \sigma_m)\sigma_m$.

(ii) L'opérateur $V^{\frac{1}{2}}$ est défini par $V^{\frac{1}{2}}x = \sum_{m=1}^{\infty} -\sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}}(x, \sigma_m)\sigma_m$ dans l'espace

$$\mathbb{D}\left(V^{\frac{1}{2}}\right) = \left\{x \in \mathcal{X} : \sum_{m=1}^{\infty} -\sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}}(x, \sigma_m)\sigma_m \in \mathcal{X}\right\}.$$

De plus, les deux opérateurs ${}_1\mathbb{V}t^{\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(t,s)$ et ${}_1\mathbb{U}t^{\frac{2}{3}}(t,s)$ peuvent être définis par

$$ {}_1\mathbb{V}_t^{\frac{3}{5},\frac{1}{3}}(t,s) = \ {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{-\frac{4}{15};t} \int_0^{+\infty} \mathcal{A}^{-1} h_{\frac{3}{5},1}(\Theta)\mathbb{V}[{}_1\mathcal{Q}_t^{\frac{3}{5}}(t,s)\Theta]xd\Theta, $$

$$ {}_1\mathbb{U}_t^{\frac{3}{5}}(t,s)x = \frac{3}{5}\int_0^{+\infty} \mathcal{A}^{-1}\Theta h_{\frac{3}{5},1}(\Theta)\mathbb{V}[{}_1\mathcal{Q}_t^{\frac{3}{5}}(t,s)\Theta]xd\Theta. $$

Pour $0 \leq s < t \leq 1$, on a

$$ \left\| {}_1\mathbb{V}_t^{\frac{3}{5},\frac{1}{3}}(t,s) \right\| \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{11}{15})} = \mu_1, \ \left\| {}_1\mathbb{U}_t^{\frac{3}{5}}(t,s) \right\| \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5})} = \mu_2. $$

Définissons

$$ x\,(t,z) \quad = \quad x(t)(z), \ t \in (0,1], \ z \in [0,\pi], $$

$$ \begin{aligned} g\left(t, x(t), {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} x\,(t)\right)(z) &= g\left(t, x\,(t,z)\,, {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} x\,(t,z)\right) = \frac{e^{-5t}\sqrt{\sin x\,(t,z)}}{5 + |x\,(t,z)|} \\ &\quad + e^{-2t}\tan^{-1}|x\,(t,z)| \,. \frac{\left| {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} x\,(t,z) \right|}{2 + \left| {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} x\,(t,z) \right|} \end{aligned} $$

$$ \mathsf{f}\,(t, x(t))\,(z) \quad = \quad \mathsf{f}\,(t, x\,(t,z)) = \left(\frac{1+e^{-t}}{5}\right)\cos x(t,z)\beta $$

$$ \mathsf{K}\,(x)\,(z) \quad = \quad \frac{1}{30}\sum_{j=1}^{15} \log\left(1 + |x\,(t_j, z)|\right). $$

Avec cette formulation, le problème (4.8)-(4.10) peut être réecrit sous la forme du système de contrôle abstrait (4.1)-(4.2).

Maintenant, on a

$$ \left\| g\left(t, x\,(t,z)\,, {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} x\,(t,z)\right) - g\left(t, y\,(t,z)\,, {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} y\,(t,z)\right) \right\| $$

$$ \leq \quad \frac{1}{5}\left\| x(t,z) - y(t,z) \right\| + \frac{\pi}{4}\left\| {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} x(t,z) - {}_1\mathfrak{I}_{0^+}^{\frac{1}{3},t} y(t,z) \right\| $$

$$ \| V^{\frac{1}{2}}\mathsf{f}(t, x(t,z)) - V^{\frac{1}{2}}\mathsf{f}(t, y(t,z)) \| \leq \frac{4}{5}\left\| x(t,z) - y(t,z) \right\|. $$

Cela signifie que les hypothèses ($\mathbb{H}1$) et ($\mathbb{H}2$) sont satisfaites avec $\mathbb{L}_1 = \frac{1}{5}$, $\mathbb{L}_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\mathbb{L}_{\mathsf{f}} = \frac{4}{5}$.

Pour prouver l'hypothèse ($\mathbb{H}3$), soit $x, y \in \mathcal{X}$, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\mathsf{K}(x)(z) - \mathsf{K}(y)(z)\right\| &= \left\|\frac{1}{30}\sum_{j=1}^{15}\log\left(1 + |x(t_j, z)|\right) - \frac{1}{30}\sum_{j=1}^{15}\log\left(1 + |y(t_j, z)|\right)\right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|x(z) - x(y)\right\|,\end{aligned}$$

ainsi, ($\mathbb{H}3$) est satisfaite avec $\mathbb{L}_{\mathsf{K}} = \frac{1}{2}$.

Enfin, toutes les conditions du **Théorème 4.3.1** sont satisfaites, ce qui montre que ,

le système intégro-différentiel $(\mathsf{k}, \upsilon)-$Hilfer fractionnaire neutre (4.8)-(4.10) est $\mathcal{T}$-contrôlable sur J.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons réussi à ajouter un ensemble des résultats à la théorie du contrôle.

Tout d'abord, nous avons étudié une nouvelle classe de systèmes de contrôle décrits par des équations intégro-différentielles fractionnaires non locales de type υ-Hilfer dans l'espace de Hilbert. Ces résultats ont ouvert de nouvelles perspectives pour étendre notre recherche et étudier une classe plus large décrivant les systèmes de contrôle intégro-différentiel de type (k, υ)-Hilfer.

Dans un premier temps, nous nous sommes concentrés sur la contrôlabilité approchée d'une nouvelle classe de systèmes de contrôle, décrits par des équations rétrogrades perturbuées non local de type Sobolev υ-Hilfer dans l'espace de Hilbert. Nous avons établi des conditions suffisantes pour obtenir nos résultats. Nous avons également obtenu de nouveaux résultats pour la contrôlabilité nulle exacte, pour une autre classe des équations intégro-différentielles fractionnaires implicites υ-Hilfer.

Enfin, nous avons introduit une nouvelle fonction appelée "**k-Wright**", grâce à laquelle nous avons étudié la contrôlabilité de trajectoire pour un système neutre non linéaire, d'un nouveau type et plus étendu, décrit par les équations différentielles fractionnaires (k, υ)-Hilfer, avec des conditions non locales dans l'espace de Hilbert. Tous ces résultats sont accompagnés d'exemples illustrant la validité des résultats obtenus, basés sur la théorie des semi-groupes, la théorie du point fixe, le calcul fractionnaire, et les inégalités de Gronwall. En plus de cela, et étant donné que ce domaine est très riche en questions ouvertes, nous présentons quelques questions intéressante consiste à

- L'étude de contrôlabilité approchée aux limites d'inclusion stochastique intégro-différentielle implicite non locale υ-Hilfer fractionnaire avec mouvement brownien et du mouvement G-brownien fractionnaire.
- L'étude de la contrôlabilité de trajectoire et la contrôlabilité approchée des systèmes stochastiques non linéaires neutres impliquant la dérivée fractionnaire (k, υ)-Hilfer et le mouvement brownien sous-fractionnaire.
- L'étude d'existence et de la contrôlabilité pour les systèmes différentiels stochastiques implicites de type Sobolev (k, υ)-Hilfer fractionnaire avec un processus α-stable et des conditions non locales de Sobolev.

Ces aspects seront abordés dans le futur.

Bibliography

[1] S. Abbas, M. Benchohra, J. E. Lazreg, J. J. Nieto and Y. Zhou, Fractional Differential Equations and Inclusions, Classical and Advanced Topics, World Scientific, Singapore, 2023.

[2] S. Abbas, M. Benchohra and G. M. N'Guérékata, Topics in Fractional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 2012.

[3] R. Almeida, A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 44 (2017), 460–481.

[4] R. L. Bagley , Theorical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, Journal of Rheology, 27(03), (1983) 201–210.

[5] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J.J. Trujillo, Fractional Calculus Models and Numerical Methods, World Scientific Publishing, New York, 2012.

[6] Y. Başcı, A. MISIR, & S. Öğrekçi, (2023). Generalized derivatives and Laplace transform in (k, ψ)-Hilfer form. Mathematical Methods in the Applied Sciences.

[7] A.E. Bashirov And N.I. Mahmudov, On concepts of controllability for deterministic and stochastic systems, SlAM Journal on Control and Optimization, 37 (1999) : 1808-1821.

[8] P. Bedi, A. Kumar, T. Abdeljawad, Z. A. Khan and A. Khan, Existence and approximate controllability of Hilfer fractional evolution equations with almost sectorial operators, Adv. Difference Equ., (2020), Paper No. 615, 15 pp.

[9] M. Bin, Y. Liu et al., Trajectory controllability of semilinear differential evolution equations with impulses and delay. Open J. Appl. Sci. 3 (2013) 37–43.

[10] S. N. Bora and B. Roy, Approximate controllability of a class of semilinear Hilfer fractional differential equations, Results Math., 76 (2021), Paper No. 197, 20 pp.

[11] I. Bouacida, M. Kerboua, S. Segni, Controllability Results for sobolev type-Hilfer fractional backward perturbed integro-differential equations in hilbert space, Evol. Equ. Control Theory, Vol 12, (2023), 213-229.

[12] D.N. Chalishajar, Controllability of second order impulsive neutral functional differential inclusions with infinite delay. J. Optim. Theory Appl. 154(2), 672â684 (2012). 93B05.

[13] D.N. Chalishajar, R.K. George, A.K. Nandakumaran, F.S. Acharya, Trajectory controllability of nonlinear integro-differential system, J. Frankl. Inst. 347(7), 1065-1075 (2010).

[14] D. Chalishajar, K. Ravikumar, K. Ramkumar and A. Anguraj, Null controllability of Hilfer fractional stochastic differential equations with nonlocal condition, Numerical Algebra, Control and Optimization, (2022).

[15] R. F. Curtain and H. Zwart, An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory, New York: World Scientific, 1995.

[16] J. P. Dauer and N. I. Mahmudov, Exact null controllability of semilinear integrodifferential systems in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 299 (2004), 322-332.

[17] A. Debbouche and V. Antonov, Approximate controllability of semilinear Hilfer fractional differential inclusions with impulsive control inclusion conditions in Banach spaces, Chaos Solitons Fractals, 102 (2017), 140–148.

[18] R. D'ıaz, E. Pariguan, On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol, Divulgaciones Matemticas, 15(2)(2007), 179–192.

[19] R. D'iaz and C. Teruel, q, k-Generalized gamma and beta functions, J. Nonlinear Math. Phys 12 (2005), 118-134.

[20] J. Diblik, Relative and trajectory controllability of linear discrete systems with constant coefficients and a single delay. IEEE Trans. Automatic Control 64 (2018) 2158–2165.

[21] K . Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[22] C. Dineshkumar, K. Sooppy Nisar, R. Udhayakumar and V. Vijayakumar, A discussion on approximate controllability of Sobolev-type Hilfer neutral fractional stochastic differential inclusions, Asian Journal of Control, 2021 (2021), 1–17.

[23] J. Du, W. Jiang and A. U. K. Niazi, Approximate controllability of impulsive Hilfer fractional differential inclusions, J. Nonlinear Sci. Appl., 10 (2017), 595–611.

[24] I. Gohberg, S. Goldberg, Basic Operator Theory. Birkhäuser Basel, 2001.

[25] S. Guechi, R. Dhayal, A. Debbouche and M. Malik , Analysis and optimal control of φ-Hilfer fractional semilinear equations involving nonlocal impulsive conditions, Symmetry, 13 (2021), 2084, 1–18.

[26] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, Singapore: World Scientific, 2000.

[27] A. Jajarmi, D. Baleanu, S. S. Sajjadi and J. J. Nieto, Analysis and some applications of a regularized ψ-Hilfer fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 415 (2022), Paper No. 114476, 19 pp.

[28] F. Jarad and T. Abdeljawad, Generalized fractional derivatives and Laplace transform, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 13 (2020), 709-722.

[29] M. D. Kassim and N.-E. Tatar, Well-posedness and stability for a differential problem with Hilfer–Hadamard fractional derivative, Abstr. Appl. Anal., 2013 (2013), Art. ID 605029, 12 pp.

[30] M. Kerboua, Approximate controllability of fractional neutral stochastic evolution equations in Hilbert spaces with fractional Brownian motion, Stoch. Anal. Appl., 36 (2018), 209-223.

[31] M. Kerboua, I. Bouacida, Trajectory Controllability of Sobolev Type (k, ψ)-Hilfer Fractional Neutral Integro-Differential System In Hilbert Space (submited).

[32] M. Kerboua, I. Bouacida, S. Segni, Null Controllability of ψ-Hilfer Implicit Fractioanl Integro-Differential Equations With ψ-Hilfer Fractional Nonlocal Conditions , Vol. 12, No. 6, december 2023, pp. 1473-1491.

[33] M. Kerboua, F. Ellaggoune and D. Baleanu, Stochastic fractional perturbed control systems with fractional Brownian motion and Sobolev stochastic non local conditions, Collect. Math., 69 (2018), 283-296.

[34] J. P. Kharade and K. D. Kucche , On the impulsive implicit ψ-Hilfer fractional differential equations with delay, Math. Methods Appl. Sci., 43 (2020), 1938–1952.

[35] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 2006.

[36] K.D. Kucche, A.D. Mali, On the nonlinear $(k; \psi)$-Hilfer fractional differential equations. Chaos Solitons Fractals 2021, 152, 111335.

[37] A. Kumar, K. Jeet and R. K. Vats, Controllability of Hilfer fractional integro-differential equations of Sobolev-type with a nonlocal condition in a Banach space, Evolution Equations and Control Theory, 11 (2022), 605-619.

[38] V. Lakshmikantham, S. Leela and J. V. Devi, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2009.

[39] J. E. Lazreg, M. Benchohra, A. Salim, (2022). Existence and Ulam stability of k-Generalized ψ-Hilfer Fractional Problem. J. Innov. Appl. Math. Comput. Sci, 2, 01-13.

[40] G.W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany to G.F.A L'Hospital, September 30, 1695, Leibniz Mathematische Schriften. Hildesheim, Germany : Olms-Verlag ; 1962. p. 301-2. First published in 1849.

[41] J. Lv and X. Yang, Approximate controllability of Hilfer fractional neutral stochastic differential equations, Dynamic Systems and Applications, 27 (2018), 691–713.

[42] R. Magin, Fractional calculus in bioengeenering, Crit. Rev. Biom. Eng. 32(1), (2004) 1–104.

[43] N.I. Mahmudov, Approximate Controllability of Fractional Neutral Evolution Equations in Banach Spaces, Abstract and Applied Analysis . 2013(1).

[44] N. I. Mahmudov and M. A. Mckibben, On the approximate controllability of fractional evolution equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivative, J. Funct. Spaces, 2015 (2015), Art. ID 263823, 9 pp.

[45] N. I. Mahmudov and S. Zorlu, On the approximate controllability of fractional evolution equations with compact analytic semigroup, J. Comput. Appl. Math., 259 (2014), 194–204.

[46] K . S. Miller and B. Ross , An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, Wiley, New York, 1993.

[47] G. Mophou , Controllability of a backward fractional semilinear differential equation, Appl. Math. Comput., 242 (2014), 168–178.

[48] S. Mubeen, G. M. Habibullah, k-fractional integrals and applications. Int. J. Contemp. Math. Sci. 2012, 7, 89-94.

[49] M. Muslim, R. K.George, Trajectory Controllability of the Nonlinear Systems Governed by Fractional Differential Equations, Differ Equ Dyn Syst (October 2019) 27(4).

[50] K. Nishimoto, Fractional calculus and its applications, Nihon Univ, Koriyama, 1990.

[51] K. B. Oldham, Fractional Differential equations in electrochemistry, Advances in Engineering software, 2009.

[52] K.B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus : theory and application of differentiation and integration to arbitrary order, Academic Press, New York, London, 1974.

[53] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences. 44, Springer, New York 1983.

[54] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

[55] E. Pourhadi, R. Saadati and J. J. Nieto, On the attractivity of the solutions of a problem involving hilfer fractional derivative via the measure of noncompactness, Fixed Point Theory, 24 (2023), 343-365.

[56] B. Ross, Fractional Calculus and Its Applications, Proceedings of the International Conference, New Haven, Springer-Verlag, New York, 1974.

[57] J. Sabatier, O. P. Agrawl and J. A. T. Machado, Advances in fractional calculus, Springer-Verlag, 2007.

[58] R. Sakthivel, N.I. Mahmudov, J.J. Nieto, Controllability for a class of fractional-order neutral evolution control systems. Appl. Math. Comput. 218, 10334-10340 (2012).

[59] R. Sakthivel, Y. Ren and N. I. Mahmudov, On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011), 1451-1459.

[60] A. Salim, M. Benchohra, J.E. Lazreg and J. Henderson, On k-Generalized-Hilfer Boundary Value Problems with Retardation and Anticipation, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. 6(2) (2022), 173-190.

[61] A. Salim, M. Benchohra, J.E. Lazreg, G. N'Guérékata, Existence and k-Mittag-Leffler-Ulam-Hyers stability results of k-generalized ψ-Hilfer boundary value problem. Nonlinear Stud. 29, 359–379 (2022).

[62] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[63] V. Shah, J. Sharma, P.H. Patel, H.R. Kataria, (2021). Tra jectory controllability of the systems governed by Hilfer fractional systems. Ymer, 20 (11), 37,â 46.

[64] J. Vanterler da C. Sousa, M. Benchohra and G. M. N'Guérékata, Attractivity for differential equations of fractional order and ψ-Hilfer type, Fract. Calc. Appl. Anal., 23 (2020), 1188–1207.

[65] J.Vanterler da C. Sousa, E.Capelas. de Oliveira, On the Ulam-Hyers-Rassias stability for nonlinear fractional differential equations using the ψ-Hilfer operator. J. Fixed Point Theory Appl. 20(3), 96 (2018).

[66] J.Vanterler da C. Sousa, E.Capelas. de Oliveira, A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator. Differ. Equ. Appl. 11, 87–106 (2019).

[67] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira, On the ψ-Hilfer fractional derivative, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 60 (2018), 72–91.

[68] J. Vanterler da C. Sousa and E. Capelas de Oliveira, Leibniz type rule: ψ-Hilfer fractional operator, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 77 (2019), 305- 311.

[69] J. Vanterler da C. Sousa, K. D. Kucche and E. Capelas de Oliveira, On the Ulam–Hyers stabilities of the solutions of ψ Hilfer fractional differential equation with abstract Volterra operator, Math. Methods Appl. Sci., 42 (2019), 3021–3032.

[70] J. Vanterler da C. Sousa, K. D. Kucche and E. Capelas de Oliveira, Stability of ψ Hilfer impulsive fractional differential equations, Appl. Math. Lett., 88 (2019), 73–80.

[71] J. Vanterler da C. Sousa, M. Vellappandi, V. Govindaraj and G. S. Frederico , Reachability of fractional dynamical systems using ψ-Hilfer pseudo-fractional derivative, Journal of Mathematical Physics, 62 (2021), Paper No. 082703, 17 pp.

[72] C. S. Varun Bose and R. Udhayakumar, A note on the existence of Hilfer fractional differential inclusions with almost sectorial operators, Math. Methods Appl. Sci., 45 (2022), 2530–2541.

[73] V. Vijayakumar and R. Udhayakumar, Results on approximate controllability for non-densely defined Hilfer fractional differential system with infinite delay, Chaos Solitons Fractals, 139 (2020), 110019, 11 pp.

[74] V. Vijayakumar and R. Udhayakumar, A new exploration on existence of Sobolev-type Hilfer fractional neutral integro-differential equations with infinite delay, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 37 (2021), 750–766.

[75] V. Vijayakumar, R. Udhayakumar and K. Kavitha, On the approximate controllability of neutral integro-differential inclusions of Sobolev-type with infinite delay, Evol. Equ. Control Theory, 10 (2021), 271–296.

[76] V. Vijayakumar, R. Udhayakumar, Y. Zhou and N. Sakthivel, Approximate controllability results for Sobolev-type delay differential system of fractional order without uniqueness, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2020 (2020), 1–20.

[77] D. Vivek, K. Kanagarajan and E. M. Elsayed , Attractivity and Ulam-Hyers stability results for fractional delay differential equations, Filomat, 36 (2022), 5707-5724.

[78] J. Wang, M. Feckan and Y. Zhou, Approximate controllability of Sobolev type fractional evolution systems with nonlocal conditions, Evol. Equ. Control Theory, 6 (2017), 471–486.

[79] Y. Wen and X. F. Zhou, Approximate controllability and complete controllability of semilinear fractional functional differential systems with control, Advances in Difference Equations, 2018 (2018), Paper No. 375, 18 pp.

[80] M. Yang, Existence uniqueness of mild solutions for ψ-Caputo fractional stochastic evolution equations driven by fBm, J. Inequal. Appl., 2021 (2021), Paper No. 170, 18 pp.

[81] Y. Zhou, Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific, Singapore, 2014.